Starogrčka matematika

Glibo, Lucija

Sveučilište u Zadru

Odjel za nastavničke studije u Gospiću
Sveučilišni integrirani prijediplomski i diplomski studij

Lucija Glibo

Starogrčka matematika

Diplomski rad

Gospić, 2023.

Sveučilište u Zadru

Odjel za nastavničke studije u Gospiću
Sveučilišni integrirani prijediplomski i diplomski studij

Starogrčka matematika

Diplomski rad

Student/ica: Mentor/ica:

Lucija Glibo dr. sc. Damir Mikoč

Gospić, 2023.

Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, **Lucija Glibo,** ovime izjavljujem da je moj **diplomski** rad pod naslovom **Starogrčka matematika** rezultat mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Ni jedan dio mojega rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mojega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada.

Gospić, 14. studenog 2023.

Zahvala

Najveće hvala ide mojim roditeljima, hvala im na svakoj riječi podrške i potpore koju su mi pružali od početka školovanja pa sve do danas. Hvala i bratu koji je uvijek bio spreman pomoći sestri i također vjerovao da će i sestra jednoga dana postati ono što je pričala dok smo još bili djeca. Hvala baki i prabaki koje su također bile uz mene kroz studentske dane i veselile se mojim uspjesima. Hvala svim članovima obitelji koji su sa mnom prolazili kroz studijske dane i bili podrška. Hvala i svim mojim prijateljima koji su vrijeme na fakultetu, ali i izvan njega učinili zabavnijim, te smo skupa prolazili kroz lijepe trenutke studiranja, ali i one manje lijepe.

Hvala svim profesorima i djelatnicima fakulteta što su uvijek bili na raspolaganju i spremni pomoći. Na kraju hvala mentoru profesoru Mikoču, što je savjetima i stručnim znanjem pomogao pri izradi ovog rada.

Sažetak

Starogrčka matematika

U ovom radu prikazani su početci i razvitak matematike u staroj Grčkoj. Stari Grci utjecali su na razvoj znanosti, filozofije i arhitekture, a njihov utjecaj na području matematike prisutan je sve do danas.

Na početku rada prikazani su brojevni sustavi starih Grka te nedostatci takvog načina zapisa brojeva. Zatim je opisan značaj prvog grčkog matematičara, Talesa Milećanina, koji je koristeći svoje teoreme rješavao mnoge praktične probleme toga vremena. Talesov učenik Pitagora i njegovi učenici postigli su značajne rezultate na području teorije brojeva i geometrije, dokazali Pitagorin poučak i otkrili iracionalne brojeve. Pitagorina škola imala je utjecaj na Platona, osnivača škole pod imenom Akademija. U Akademiji su se proučavale aritmetika, trigonometrija i planimetrija. Jedan od najpoznatijih učenika Akademije, Aristotel, najveći je doprinos dao na području logike. Poseban je naglasak stavljen na doprinos najpoznatijeg grčkog matematičara Euklida, zvanog ocem geometrije. Euklid je ostavio 13 knjiga obuhvaćenih u jedno veliko djelo *Elementi*. *Elementi* su stoljećima bili osnovni udžbenik matematike te jedno od najviše proučavanih djela. Naveden je dio definicija, postulata, aksioma i propozicija zapisanih u *Elementima* te su ukratko opisane teme u svakoj od 13 knjiga. Nakon Euklida opisan je doprinos Arhimeda, s kojim završava starogrčko doba matematike. Rad završava prikazom triju klasičnih problema starogrčke matematike.

Ključne riječi:

brojevni sustavi, teorem, poučak, geometrija, aritmetika, trigonometrija

Summary

Ancient Greek mathematics

This paper presents the beginnings and historical development of ancient Greek mathematics. The ancient Greeks influenced the development of science, philosophy and architecture, and their influence in the field of mathematics is still present nowadays.

In the introductory part of the paper, the number systems of the ancient Greeks and their disadvantages are presented. Then the importance of the first Greek mathematician, Thales of Miletus, who used his theorems to solve many practical problems of that time, is described. Thales' student Pythagoras and his students reached significant results in the field of number theory and geometry, proved Pythagoras' teaching and discovered irrational numbers. The school of Pythagoras influenced Plato, who founded his own school, the famous Academy. Arithmetic, trigonometry and planimetry were studied at the Academy. One of the most famous students of the Academy, Aristotle, made the greatest contribution in the field of logic. A special emphasis is placed on the contribution of the most renowned Greek mathematician Euclid, known as the founder of geometry. Euclid left 13 books incorporated into one great work called Elements. For centuries, Elements was a basic mathematics textbook and one of the most studied works. Some of the definitions, postulates, axioms and propositions presented in the Elements are listed, and the topics in each of the 13 books are briefly described. After Euclid, the contribution of Archimedes is described, who marks the end of the ancient Greek age of mathematics. The paper ends with a presentation of three classical problems of ancient Greek mathematics.

Keywords:

number systems, theorem, lesson, geometry, arithmetic, trigonometry

Sadržaj

1. Uvod 1
2. Matematika kroz povijest 2
3. Starogrčka matematika 5
   - 3.1. Stara Grčka 7
   - 3.2. Grčki brojevi 8
   - 3.3. Tales 10
   - 3.4. Pitagora 13
     - 3.4.1. Figurativni brojevi 14
     - 3.4.2. Pitagorin poučak 15
     - 3.4.3. Iracionalni broj 17
   - 3.5. Platon 18
   - 3.6. Aristotel 22
   - 3.7. Euklid 24
     - 3.7.1. Elementi 25
   - 3.8. Arhimed 28
   - 3.9. Tri klasična problema starogrčke matematike 33
     - 3.9.1. Udvostručenje kocke 33
     - 3.9.2. Kvadratura kruga 35
     - 3.9.3. Trisekcija kuta 37
4. Zaključak 39
5. Literatura 40
6. Popis ilustracija 43

1. Uvod

Tijekom povijesti matematika se proučavala i spoznaje su se širile od najstarijih civilizacija do danas. Prve matematičke zapise susrećemo već na egipatskim papirusima. U Hamurabijevo doba Sumerani su razvili brojevni sustav (seksagezimalni) a zapisi na glinenim pločicama svjedoče i o nastavi matematike. Već tada, kao pomoćna sredstva sastavljane su tablice množenja, tablice kvadrata, kvadratnih korijena i recipročnih vrijednosti. Egipćani su rješavali linearne i kvadratne jednadžbe a korijen od dva računali su vrlo točno.

Prije starih Grka matematika se temeljila na iskustvu, a Grci su sva dotadašnja znanja povezivali u jedan logički sustav te tako matematiku promovirali u znanstvenu disciplinu (Hogben, 1970: 24).

Prva izučavanja matematike u staroj Grčkoj susrećemo u Joniji. Budući da je većina država stare Grčke imala pristup moru, na svojim prekomorskim putovanjima Grci su preuzeli matematička znanja od Egipćana. Stari Egipat smatra se i pradomovinom geometrije. Kao i većina ljudskih spoznaja geometrija je proistekla iz praktičnih potreba svakidašnjeg života, uostalom, i sam naziv preveden s grčkog znači zemljomjerstvo. Stari Egipćani znali su računati površine trokuta, pravokutnika, trapeza i kruga te volumene kocke, kvadra i valjka (Brückler, 2022: 13). Nažalost, iz tog vremena malo je pisanih dokumenata, pa ne možemo zaključiti na kojoj je razini bila egipatska teorijska strana geometrije.

Pravom teorijskom i egzaktnom znanošću geometriju su učinili stari Grci u vremenu od 7. do 3. st. pr. Krista. Početak bavljenja geometrijom povezuje se s Talesom iz Mileta, a nastavlja Pitagorom i njegovom školom. Posebno mjesto u razvoju geometrije pripada grčkim misliocima i filozofima Platonu, Aristotelu i Euklidu, koji je u svom djelu *Elementi* izgradio strogi logičko-deduktivni sustav u kojem stoljećima ništa bitnoga nije trebalo mijenjati.

S obzirom na najznačajnije protagoniste starogrčku matematiku dijelimo na tri najznačajnija razdoblja: razdoblje Pitagore, razdoblje Euklida i razdoblje Arhimeda.

U obradi teme i pisanju rada koristila sam se navedenom literaturom i internetskim stranicama enciklopedija, matematičkih časopisa i blogova. Kao posebno važan izvor mogu istaknuti prijevod Euklidovih *Elemenata*.

2. Matematika kroz povijest

Matematika je prisutna među ljudima od najstarije povijesti. Jedan od dokaza koji nam to potvrđuju je kost s 29 rezova koji predstavljaju dane u kalendarskom mjesecu. Ovaj primitivni zapis dana u mjesecu potječe iz 37. stoljeća prije Krista i predstavlja jedan od najstarijih matematičkih artefakata (Komarova, 2015).

Taj artefakt pronađen je na jugu Afrike, ali slični artefakti pronađeni su i na drugim mjestima.

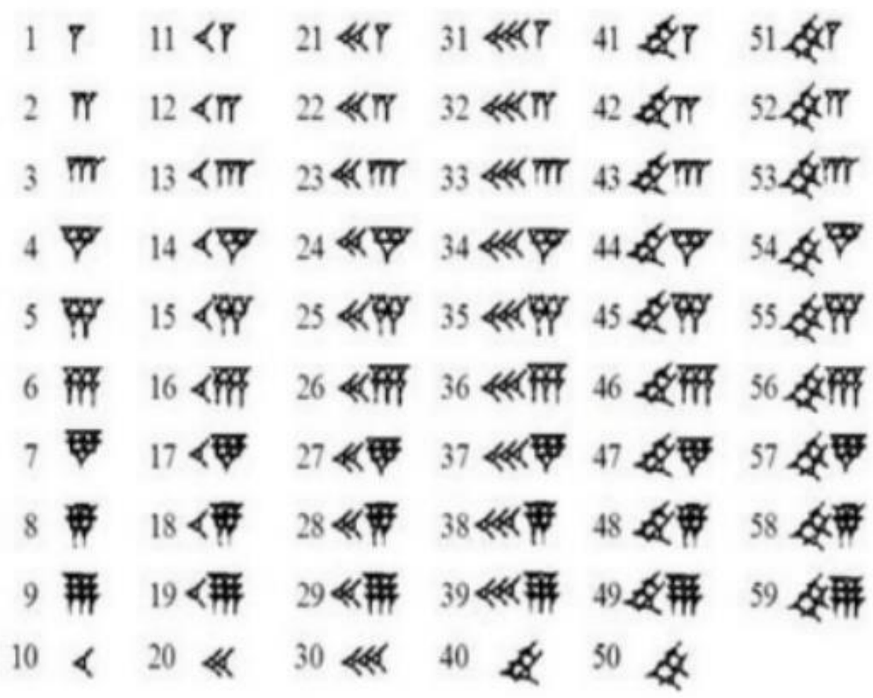
Broj 29, koji predstavlja broj dana u mjesecu, može se vidjeti i na crtežima u špiljama Lascauxa, koji potječu iz perioda od 18000. do 15000. g. pr. Krista.

Slika 1: Kost babuna s 29 rezova

Izvor: Komarova, N. (2015)

Najstariji sačuvani matematički tekstovi potječu iz drevnog Egipta i Mezopotamije. Prvi egipatski matematički tekstovi potječu iz 2. tisućljeća pr. Kr. i pokazuju da su Egipćani matematiku koristili u astronomiji, geodeziji, pomorskim putovanjima te pri konstruiranju građevina, brana, kanala i utvrda.

Drevni narodi su imali vlastite sustave prikazivanja brojeva. Tijekom 3. i 2. tisućljeća pr. Kr. Egipćani su se koristili hijeroglifskim numeričkim sustavom. Sumerani su razvili brojevni sustav s bazom 60, zbog baze 60 nazvan je seksagezimalni. U seksagezimalnom brojevnom sustavu brojevi su se pisali s pomoću dvaju osnovnih simbola u obliku klina, bili su to simboli Y i $<$. Simbol Y vrijedio je 1 i koristito se maksimalno devet puta uzastopno. Simbol $<$ imao je vrijednost 10 i koristio se maksimalno pet puta uzastopno (Hogben, 1970: 28).



Slika 2: Znamenke sumeranskog seksagezimalnog brojevnog sustava.

Izvor: Brückler, F.M. (2014)

Decimalni brojevni sustav koji je danas u širokoj upotrebi stigao je iz arapskog svijeta. Često ga se naziva i arapskim brojevnim sustavom iako to nije potpuno točno jer je u arapski svijet stigao iz Indije.

Kroz povijest ljudi su se koristili slovima za prikazivanje brojeva. Na taj način brojeve su prikazivali stari Grci, Armenci, Židovi i narodi Rimskog Carstva. Zajedno s kršćanstvom i alfabetskim pismom takav način prikazivanja brojeva došao je i do Slavena.

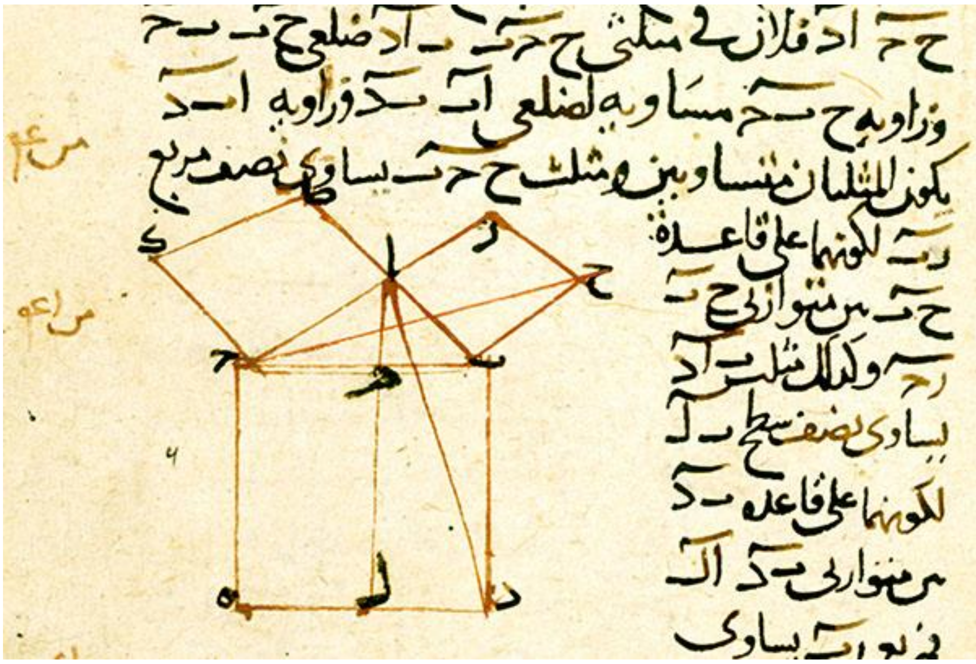
Prvim matematičarem smatra se grčki filozof Tales iz Mileta, rođen 624. g. pr. Krista. Iako nije sačuvano nijedno njegovo djelo, pripisuju mu se prvi matematički teoremi. Putovanjima u Egipat Tales proširuje svoja matematička znanja te ih dalje širi starom Grčkom. Rješavao je složene praktične zadatke od kojih je najpoznatiji mjerenje visine egipatske piramide (Komarova, 2015).

Jedna od najvažnijih osoba za razvoj matematike u staroj Grčkoj bio je Talesov učenik Pitagora, koji je isto tako boravio u Egiptu i učio od egipatskih matematičara. Pitagora je poznat po vlastitoj školi koja je svijetu ostavila mnoga otkrića. Uz poznati Pitagorin poučak škola je postavila i osnove geometrije.

Jedno od postignuća pitagorejaca je i otkriće iracionalnih brojeva (Brückler, 2014: 21).

Značajan dio saznanja o starogrčkoj matematici preuzet je iz Euklidova djela *Elementi*, koje potječe iz oko 300. godine prije Krista.

To djelo metodički izlaže definicije, aksiome i postulate do kojih su došli matematičari tijekom prethodnih stoljeća (Komarova, 2015).



Slika 3: Dokaz iz Euklidove knjige *Elementi*

Izvor: Komarova, N. (2015)

Razvoj moderne matematike počinje od 17. stoljeća nove ere i temelji se na radovima znanstvenika poput Keplera, Galilea, Newtona i Leibniza. Tumačeći zakone fizike, oni su uvelike pridonijeli i razvoju matematike (Komarova, 2015).

Dakle, razvoj matematike ne možemo gledati odvojeno od razvoja fizike, astronomije i ostalih znanstvenih disciplina.

Matematika se razvijala kroz povijest zbog potreba ljudi za mjerenjem, usporedbom, trgovinom i rješavanjem praktičnih problema. Međutim, razvoju je doprinijela i ljudska težnja za spoznajom i razumijevanjem svijeta oko nas.

3. Starogrčka matematika

Izrazom starogrčka matematika koristimo se kad govorimo o matematici razvijenoj na području stare Grčke u periodu od prvih Olimpijskih igara 776. g. pr. Kr. pa do smrti čuvenog Aleksandra Velikog 323. g. pr. Kr. To razdoblje neki znanstvenici proširuju od 1000. g. pr. Kr. pa do dolaska kršćanstva u grčke krajeve oko 3. stoljeća nove ere (Struve i Kalistov, 1962).

Poveznica među matematičarima toga doba bio je grčki jezik iz kojeg potječe i izraz matematika - grčka riječ *mathema* imala je značenje nauk, znanje.

Svoja prva matematička znanja stari su Grci preuzeli od Egipćana i Babilonaca. Tako je i Tales iz Mileta, kojeg se smatra začetnikom grčke matematike, prve spoznaje iz geometrije stekao prilikom boravaka u Egiptu.

Stari Grci nisu se zadovoljili samo praktičnom primjenom matematike već su se posvetili i matematičkoj teoriji i dokazivanju teorijskih postavki. Svaki su zaključak logički izvodili iz jasnih postavki. Mnogi matematičari toga doba bili su i ugledni filozofi, astronomi i fizičari.
Pitagora i njegovi učenici spoznali su različita svojstva brojeva, proučavali i dokazivali teoreme, razvijali aritmetiku i otkrili iracionalne brojeve.
Rješavajući različite probleme, grčki su matematičari postavili tri klasična problema geometrije:

1. udvostručenje kocke
2. kvadratura kruga
3. trisekcija kuta (Jankov i Papić, 2012:11).

Rješavajući te probleme starogrčki matematičari došli su do velikih otkrića i proširili spoznaje tadašnje matematike.

Pitagora i njegova škola značajno su utjecali na matematičare koji su došli nakon njega, među ostalima i na Platona, osnivača poznate Akademije. Platonov učenik Aristotel svojim je doprinosom razvoju logike pridonio da se korištenjem logičkih koraka dokazuju ili demantiraju postavljene teorije i teze.

Euklid je svojim djelom *Elementi* postavio teorijske temelje matematike. Demokrit, polazeći od atomizma, razvija metodu koju je do savršenstva doveo Arhimed i s pomoću nje riješio velik broj praktičnih problema koji se danas rješavaju uz pomoć integralnog računa.

Za razliku od empirijskog pristupa koji je prevladavao prije njih, stari Grci pokušavaju postaviti temelje matematike na najnužnijim teoremima. Bio je to i Euklidov cilj u djelu *Elementi*, koje je u naredne dvije tisuće godina bilo osnovni udžbenik matematike (URL 1.).

Zanimljivo je da Grci nisu razvili jedinstven brojevni sustav, već su se koristili dvama brojevnim sustavima, od kojih ni jedan nije bio praktičan.

3.1. Stara Grčka

Pojam stara Grčka koristimo za opis područja u kojem se koristio grčki jezik u antičko doba. U zemljopisnom smislu to je područje koje obuhvaća današnju Grčku, područje zapadne obale Turske (Joniju), Cipar, jug Italije sa Sicilijom te dio sjeverne Afrike (Brückler, 2014:17).

Slika 4: Područje stare Grčke u 6. st. pr. Kr.

Izvor: URL 10.

Za početak i kraj perioda stare Grčke ne postoje općeprihvaćeni datumi. Uobičajeno se pod tim pojmom podrazumijeva period grčke povijesti prije osnutka Rimskog Carstva.

Neki autori uključuju u to razdoblje i kulture koje su se razvijale od 16. do 11. stoljeća prije Krista ali većina povjesničara smatra da se minojska i mikenska kultura razlikuju od kasnijih grčkih kultura, pa ih treba zasebno i razmatrati.

Tradicionalno period stare Grčke počinje s održavanjem prvih Olimpijskih igara 776. g. pr. Kr. i završava smrću Aleksandra Velikog 323. g. pr. Kr (Struve i Kalistov, 1962).

Spomenute godine dogovorene su među povjesničarima, ali ima autora koji smatraju period stare Grčke neprekinutim razdobljem koje traje od 1000. godine prije Krista pa do dolaska kršćanstva u te krajeve u 3. stoljeću poslije Krista. Nakon razdoblja stare Grčke slijedi razdoblje koje nazivamo helenističkim razdobljem (Struve i Kalistov, 1962).

Staru Grčku mnogi znanstvenici smatraju temeljem zapadne civilizacije. Snažan utjecaj grčke kulture bio je na moćno Rimsko Carstvo, koje je tu kulturu dodatno proširilo Europom i šire. Dostignuća stare Grčke imala su nemjerljiv utjecala na znanost modernog svijeta, osobito u periodu renesanse te procvatom neoklasicizma u 18. i 19. stoljeću.

3.2. Grčki brojevi

Stari Grci koristili su se dvama brojevnim sustavima, akrofonskim i alfabetskim. U starijem, akrofonskom sustavu jedinica je prikazivana kao okomita ravna crta. Akrofonski simbol za broj 5 nije bio Π kako bi se očekivalo, a vjerojatni razlog tome je što se grčki alfabet izmijenio nakon što su se usvojili simboli za znamenke. Broju 10 i njegovim potencijama pridruženi su simboli koji su ujedno i prva slova njihovog imena – po tome je sustav i dobio ime (Dvornik, 2011).
Kombinacijom simbola za broj 5 te simbola za potencije broja 10 dobiju se simboli za brojeve 50, 500, 5000 i 50000.

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ	𐅄	H	𐅅	X	𐅆	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000	5000	10000

Γ	Δ	H	X	M
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Myrioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

Slika 5: Akrofonske znamenke

Izvor: Dvornik, J. (2011)

Akrofonski sustav nije bio mjesno-pozicijski ni dekadski, ali možemo reći da je primarna baza bila 10, a sekundarna 5 (Dvornik, 2011). Simboli su se pisali slijeva nadesno, pa je primjerice broj 258 zapisan akrofonskim znamenkama izgledao kao na slici:

Slika 6: Broj 258 zapisan akrofonskim znamenkama

Pravila su određivala koliko se puta koja od znamenaka mogla upotrijebiti. Prema pravilu potencija broja 10 mogla se upotrijebiti najviše četiri puta. Simbol za umnožak broja 5 s potencijom broja 10 mogao je biti upotrijebljen samo jednom. Zbog tih ograničenja najveći broj koji se mogao zapisati u akrofonskom sustavu bio je 99999.
Nedostatak akrofonskog brojevnog sustava bio je u tome što je za prikazivanje velikih brojeva trebao veliki broj simbola, što nije bilo praktično (Dvornik, 2011).

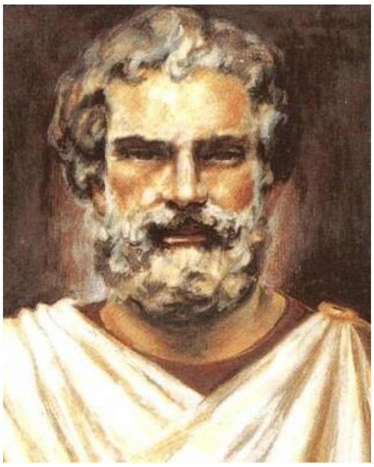
Nakon akrofonskog sustava korišten je poznatiji alfabetski sustav. U njemu su brojevi označavani velikim i malim slovima grčkog alfabeta (Dvornik, 2011).
Svih 27 slova alfabeta, uključujući i velika i mala slova, bilo je pridijeljeno brojevima tako da je taj sustav imao više simbola od akrofonskog sustava.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Slika 7: Starogrčki alfabetski sustav

Poput akrofonskog, ni alfabetski sustav nije bio pozicijski. Nije imao bazu kao ni oznake za nulu. Pozicijska priroda nije bila ni potrebna jer je svako od slova imalo svoju egzaktnu vrijednost. Ipak, pri zapisivanju brojeva stari Grci pazili su da slijeva nadesno opada red, pa se npr. broj 108 zapisivao kao ΡΗ.

3.3. Tales



Slika 8: Tales

Izvor: URL 11.

Za Talesa rođenog u Miletu 624. g. pr. Kr., grčkog znanstvenika, matematičara i filozofa, mnogi kažu da je osnivač matematike. Nažalost, ni jedno njegovo djelo nije sačuvano. Porijeklom je bio Feničanin pa nije sasvim sigurno je li rođen u Miletu ili je tamo stigao nakon progonstva iz Fenicije. Puno je putovao i usvajao tadašnja znanja od ostalih naroda, tako je geometriju učio od Egipćana, a od Babilonaca astronomiju (Dadić, 1992:23).

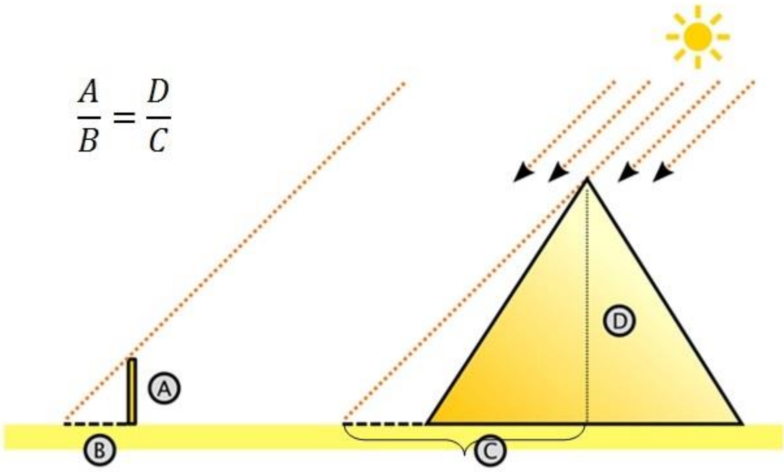
Slavu je stekao predviđanjem pomrčine Sunca koja se dogodila 28. svibnja 585. g. pr. Kr. te po svojim teoremima. Najznačajniji matematički rezultati koje povezujemo uz Talesa njegovi su teoremi:

1. „*Svaki promjer raspolavlja krug.*
2. *Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.*
3. *Vršni kutovi su jednaki.*
4. *Dva su trokuta sukladna ako imaju jednu jednako dugu stranici i jednake njoj priležeće kutove (KSK teorem o sukladnosti trokuta).*
5. *Svaki je kut nad promjerom kruga pravi*“ (Brückler, 2014:18).

Spomenuti teoremi bili su poznati i matematičarima u Egiptu i Babilonu, ali pripisuju se Talesu jer ih je prvi dokazao. Naglašavao je da nije dovoljno samo opažati pojave, već se one moraju moći i dokazati.

Svojim matematičkim zaključcima dao je doprinos i nautici. Koristeći se teoremom o sukladnosti trokuta, pronašao je metodu za izračunati udaljenost broda od obale.

Postoje zapisi o tome kako je izračunao visinu piramide metodom omjera duljina sjena štapa i piramide (slika 9). Budući da je jedan dio sjene piramide unutar same piramide, javio se problem kako ju točno izmjeriti. Problem je riješio tako da je sjenu piramide izmjerio u trenutku kad je dio sjene unutar piramide jednak polovici brida baze, a vanjski je dio bilo lagano izmjeriti (Hogben, 1970:23).

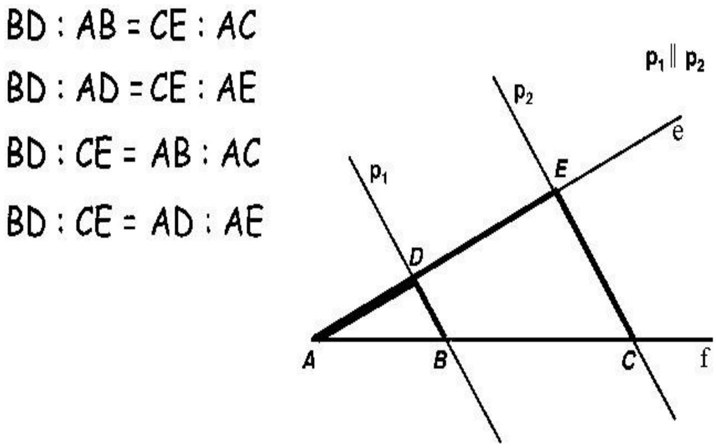


Slika 9: Računanje visine piramide pomoću sjene

Izvor: URL 12.

Rješavajući problem računanja visine piramide, Tales je došao do teorema o proporcionalnosti: *„Dva paralelna pravca na krakovima nekog kuta odsijecaju proporcionalne dužine“* (Paić i sur., 2021:104).

Uz oznake kao na slici 10. vrijedi:



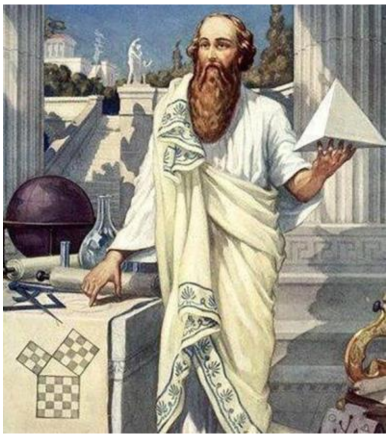
Slika 10: Teorem o proporcionalnosti

Pretpostavlja se da je Tales bio Pitagorin učitelj i da je na njega prenosio svoja znanja. U svoje vrijeme imao je nadimak „mudar čovjek“, a jedna od njegovih mudrih izreka kaže: *„Najbrži je um jer on trči svuda.“*

Tales je među prvima objasnio prirodne fenomene na znanstveni, a ne mitološki ili teološki način. Postavio je nove, racionalne i znanstvene teorije. Aristotel je Talesa cijenio i kao prvog filozofa te analizirao njegove teze koristeći metode logike.

Uz teoreme koje nam je ostavio najveća je Talesova ostavština i usvajanje znanstvenih metoda te njihova primjena, posebno kod dokazivanja postavljenih teza.

3.4. Pitagora



Slika 11: Pitagora

Izvor: URL 13.

Pitagora je rođen 582. g. pr. Krista na otoku Samosu. Otac mu je bio trgovac u Tiru, pa je zajedno s njim puno putovao (URL 2.). Tijekom putovanja susretao se s mnogim učiteljima i misliocima. Kao mladić susreo je i Talesa iz Mileta, koji je u njemu prepoznao veliki talent i preporučio mu da svoja znanja proširi odlaskom u Egipat. U Egiptu je sudjelovao u brojnim raspravama sa svećenicima, a pretpostavlja se i da je postao svećenik u hramu u Diospolisu.

Nakon povratka u rodni Samos osnovao je svoju prvu školu pod imenom „Polukrug" (Brückler, 2022: 22). Zbog strogosti i metoda predavanja koje je usvojio u Egiptu stanovnici Samosa nisu dobro prihvatili njegovo poučavanje. Iz tog razloga Pitagora odlazi u grad Crotonu na jugu Italije, gdje je stekao velik broj sljedbenika. U Crotoni osniva matematičku školu zvanu pitagorejska škola. Njegovi učenici, pitagorejci, bili su usredotočeni na četiri područja: aritmetiku, geometriju, glazbu i astrologiju.

Prisutne na svojim predavanjima podijelio je u dva kruga, unutarnji krug činili su učitelji, dok su u vanjskom krugu bili učenici. Nakon 3 godine slušanja predavanja učenik je mogao ući u unutarnji krug.

Prema nekim izvorima u unutarnjem krugu bilo je i žena. Jednu od njih, Teanu, Pitagora je oženio te je ona nakon njegove smrti širila njegove misli i stajališta.

Nakon Pitagorine smrti mnogi članovi njegove škole napuštaju Italiju i odlaze u Grčku te se još stoljećima održavaju kao filozofsko-vjerski i matematički red.

Ono po čemu se Pitagorina škola razlikovala od ostalih škola je filozofija da je znanje put k izbavljenju duše (URL 2.).

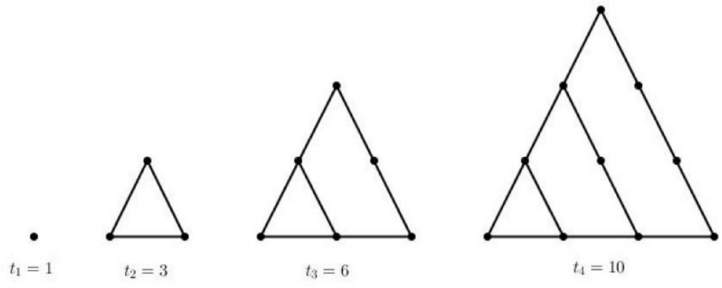
Nikada prije matematika nije imala toliku životnu važnost kao što je to bilo kod pitagorejaca.

3.4.1. Figurativni brojevi

Pitagorejci nisu imali brojčane simbole, nego su brojeve vidjeli kao geometrijske uzorke. Tako su brojeve klasificirali kao trokutne, kvadratne, peterokutne ... s obzirom na geometrijski uzorak koji tvore (Dadić, 1992: 25).

Trokutni brojevi su oni brojevi čiji je oblik:

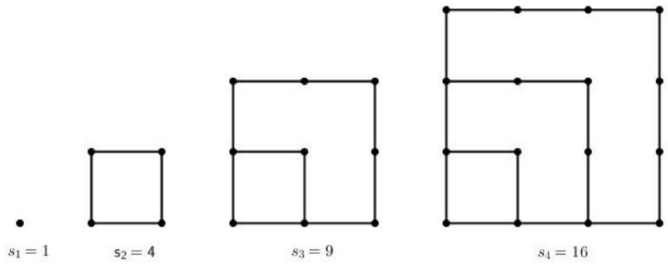
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$ (Brückler, 2014: 23).



Slika 12: Trokutni brojevi

Kvadratni su brojevi oblika:

$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$$ (Brückler, 2014: 24).



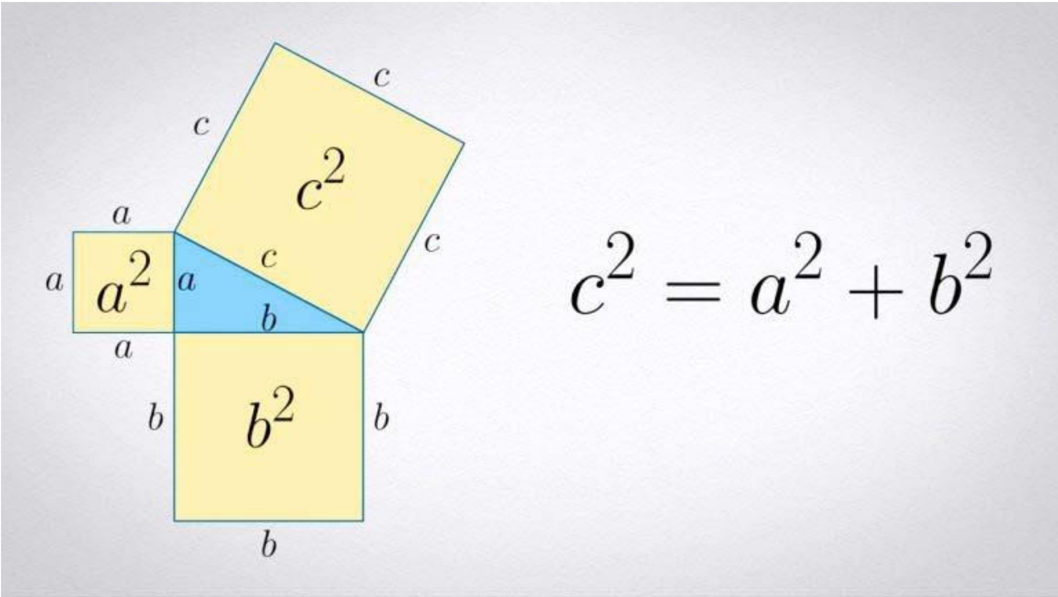
Slika 13: Kvadratni brojevi

Brojeve koji su se mogli predstavljati u geometrijskom obliku danas nazivamo figurativni brojevi (Brückler, 2014: 23). Teorija figurativnih brojeva proučavana je od Nikomahova *Uvoda u aritmetiku* (*Introductio arithmeticae*) napisanog oko 100. godine, preko Fibonaccija u 12. stoljeću pa sve do znanstvenih radova iz 17. i 18. stoljeća koje su pisali matematičari Fermat i Euler.

3.4.2. Pitagorin poučak

Jedan od osnovnih teorema geometrije je Pitagorin poučak:

„Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta."



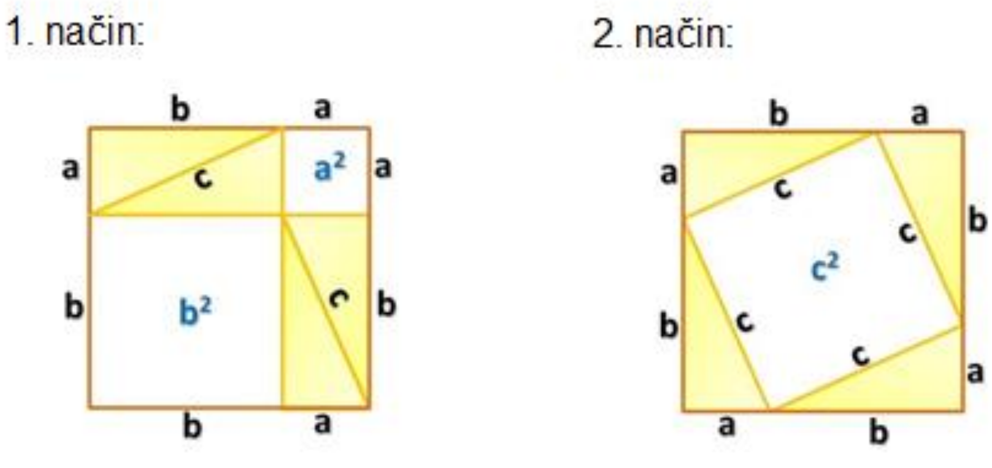
Slika 14: Pitagorin poučak

Pitagorini učenici nisu pojam kvadrat shvaćali kao što ga mi danas shvaćamo, već kao geometrijski lik koji je konstruiran nad stranicom trokuta. „*Dokaz Pitagorina poučka zapisan u I. knjizi Euklidovih Elemenata prikazuje osnovni princip geometrijske algebre kod starih Grka, a to je da identitete koje danas interpretiramo algebarski, stari Grci su gledali i dokazivali čisto geometrijski kao jednakost duljina, površina ili volumena. Kada se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao ovdje o jednakosti jednog kvadrata s druga dva, misli se na jednakost mjere, u ovom slučaju površine*" (Brückler, 2022: 24).

Ne znamo sa sigurnošću koji je izvorni dokaz za Pitagorin poučak, ali pretpostavka je da se radilo o dokazu metodom disekcije tj. metodom dijeljenja:

kvadrat sa stranicom $a + b$ podijeli se na dva kvadrata, jedan sa stranicama a i drugi sa stranicom b, te na dva jednaka pravokutnika sa stranicama dužine a i dužine b. Te pravokutnike možemo podijeliti na 2 pravokutna trokuta dijagonalom c. Na taj način u kvadratu sa stranicom $a + b$ imamo uz dva manja kvadrata i četiri trokuta.

Površinu kvadrata sa stranicom $a + b$ možemo prikazati na dva načina:



Slika 15: Dokaz Pitagorina poučka

Iz prvog načina prikazivanja slijedi jednakost:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

dok iz drugog proizlazi:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$$

Izjednačavanjem dobivamo:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

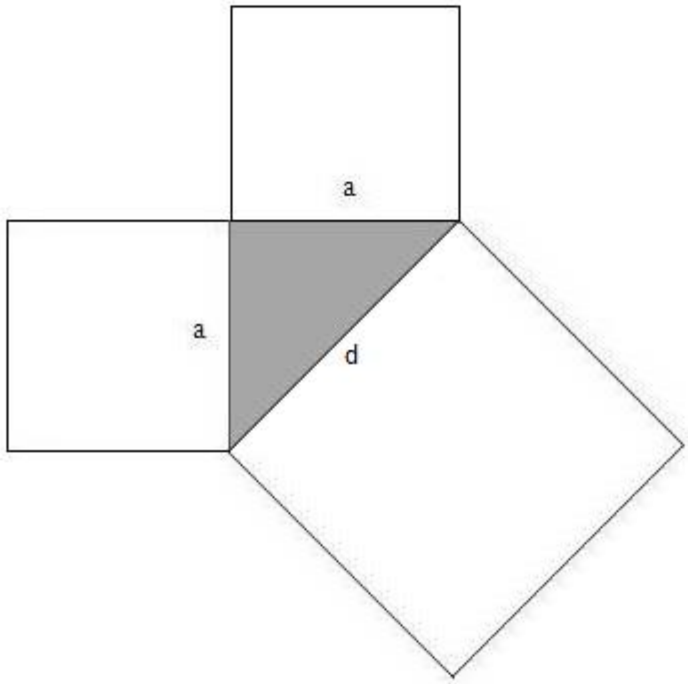
pa slijedi da je $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

Interesantno je da je taj poučak u specijalnim slučajevima (primitivne pitagorejske trojke) bio poznat i Babiloncima, međutim nazvan je po Pitagori jer se smatra da ga je on ili netko od njegovih učenika i dokazao (Brückler, 2022: 24).

3.4.3. Iracionalni broj

Pitagora i njegovi učenici dugo su vjerovali da je u biti svega što nas okružuje broj. Matematika je za njih bila više od znanosti, a brojevima i odnosima među njima čak su pripisivali simboličku mističku ulogu. Smatrali su da je svaki broj omjer dva cijela broja, broj je bio savršenstvo i postojanje iracionalnih brojeva srušilo bi harmoniju među brojevima u koju su vjerovali (Kalina, 1985:28).

Ipak, do spoznaje da postoje iracionalni brojevi došli su uz pomoć Pitagorina poučka.



Slika 16: Iracionalan broj

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni jednakokračni trokut, dobiva se jednakost:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \ ,$$

Iz $d^2 = 2a^2$ dobivamo da je: $d = a\sqrt{2}$

Uzmemo li da su kraci jednakokračnog trokuta $a = 1$, dobivamo da je hipotenuza $d = \sqrt{2}$.

Metodom kontradikcije Euklid je dokazao da $\sqrt{2}$ ne može biti racionalan broj, odnosno da ga ne možemo prikazati u obliku omjera dva cijela broja.

Spoznaja da postoje brojevi koje ne možemo prikazati u obliku omjera dva prirodna broja pitagorejce je iznenadila toliko da su ju čuvali u strogoj tajnosti (Brückler, 2014: 21).

Naziv iracionalan broj usvojen je u kasnijem periodu razvoja matematike, ali se pitagorejce smatra prvima koji su otkrili da postoje iracionalni brojevi.

3.5. Platon

Slika 17: Platon

Izvor: URL 14.

Platon je rođen u Ateni 427. g. pr. Krista. Rođeno ime mu je bilo Aristoklo, dok je nadimak Platon („široki“) pretpostavlja se dobio zbog svoje atletske građe. Potjecao je iz ugledne aristokratske obitelji, što mu je omogućilo kvalitetno obrazovanje (URL 3.).

Kao mladić u dvadesetoj godini postao je Sokratov učenik i od njega je usvojio filozofski nauk. Nakon Sokratove smrti često je putovao u južnu Italiju, gdje se susretao s Pitagorinim učenicima. Putovao je i na Siciliju i u Egipat kako bi stekao nove spoznaje. Nakon povratka u Grčku u Ateni je osnovao vlastitu filozofsku školu nazvanu Akademija po junaku Akademu.

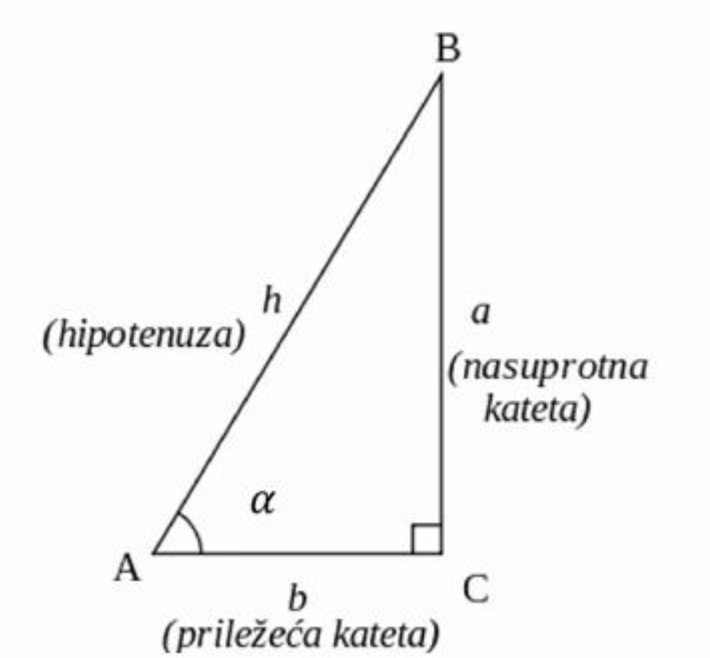
Polazište njegove filozofije je učenje o idejama, koje su jedina prava zbilja, a svijet osjetilnih stvari samo je slika svijeta ideja (Dadić, 1992: 29).

Prema Platonu jedino su ideje vječne i nepromjenjive, dok je sve drugo nesavršeno i promjenjivo. Platonov idealizam nasljeđe je pitagorejaca i njihovog shvaćanja brojeva kao nečeg savršenog i harmoničnog.

Za Akademiju se smatra da je bila nalik pitagorejskim školama i od matematičkih disciplina u njoj su se proučavale aritmetika, trigonometrija i planimetrija. Cilj Akademije je osposobiti učenike za razumsko i kritičko razmišljanje.

„*Naziv aritmetika potječe od grčkih riječi arithmos (broj) i techne (umijeće) što bismo mogli prevesti kao umijeće s brojevima. Danas je aritmetika grana matematike koja proučava računske operacije s brojevima, kako one osnovne: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, tako i napredne operacije, u koje ubrajamo kvadriranje, korjenovanje i potenciranje*“ (URL 4.).

„*Naziv trigonometrija potječe od dviju grčkih riječi, riječi* trigon, *što znači trokut, i riječi* metron, *što znači mjera. Trigonometrija proučava odnose između stranica i kutova u trokutu*" (URL 5.). Te odnose možemo izraziti s pomoću trgonometrijskih funkcija:



$$sin\alpha = \frac{a}{h}$$

Sinus kuta pri vrhu A jednak je kvocijentu nasuprotne katete i hipotenuze pravokutnog trokuta.

$$cos\alpha = \frac{b}{h}$$

Kosinus kuta pri vrhu A jednak je kvocijentu priležeće katete i hipotenuze pravokutnog trokuta.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Tangens kuta pri vrhu A jednak je kvocijentu nasuprotne i priležeće katete pravokutnog trokuta.

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

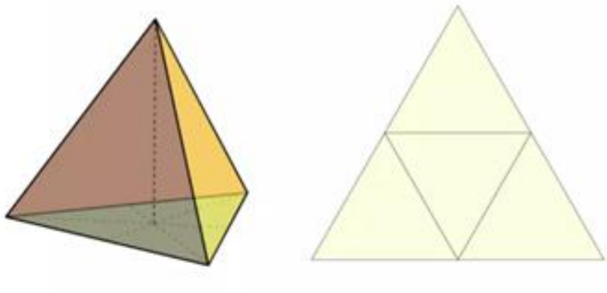
Kotangens kuta pri vrhu A jednak je kvocijentu priležeće i nasuprotne katete pravokutnog trokuta.

Slika 18: Trigonometrijske funkcije

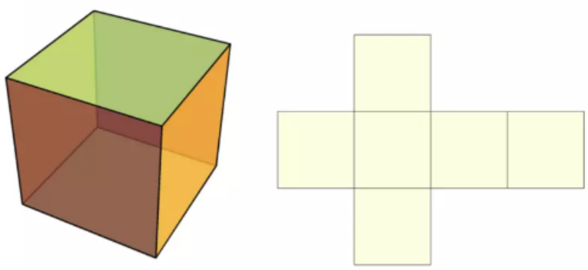
U planimetriji, geometriji likova, Platon se bavio isključivo pravilnim geometrijskim tijelima te ih opisuje u svom djelu *Timej* (Brückler, 2014: 36).

Sve plohe kod platonovih tijela su jednaki mnogokuti. U Platonova tijela ubrajamo:

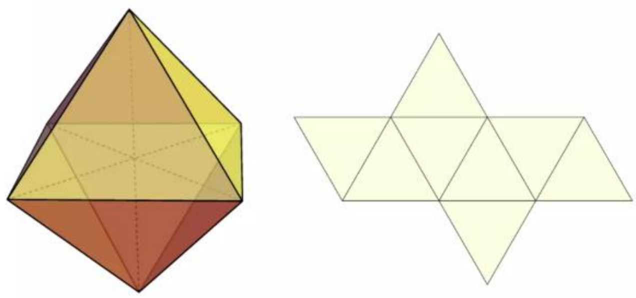
Tetraedar (4 plohe) :



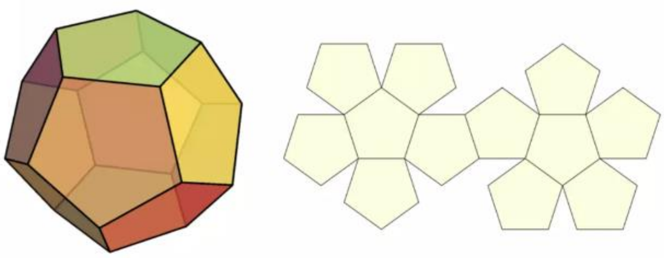
Heksaedar (poznatiji kao kocka - 6 ploha):

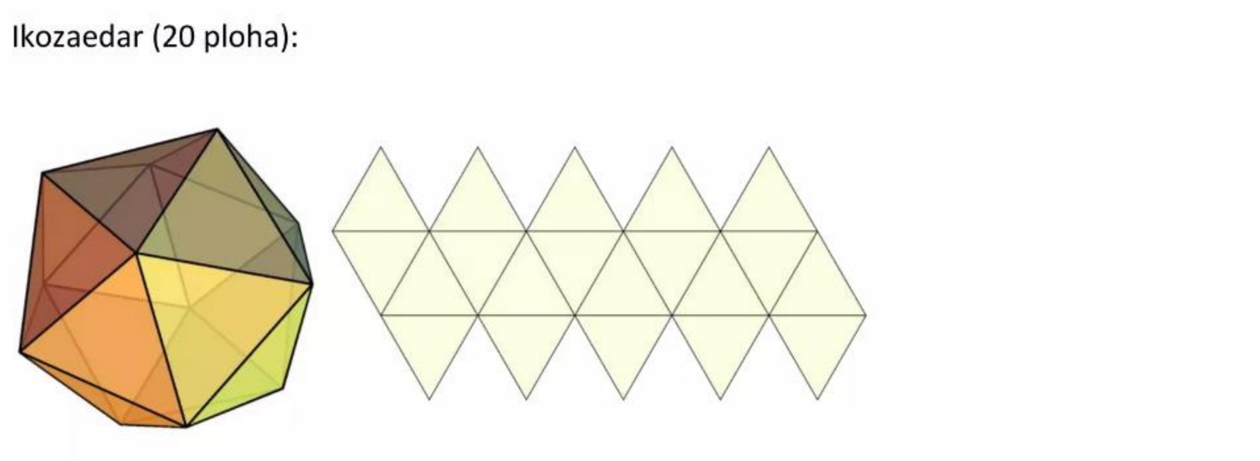


Oktaedar (8 ploha):



Dodekaedar (12 ploha):





Slika 19: Platonova tijela

Izvor: URL 15.

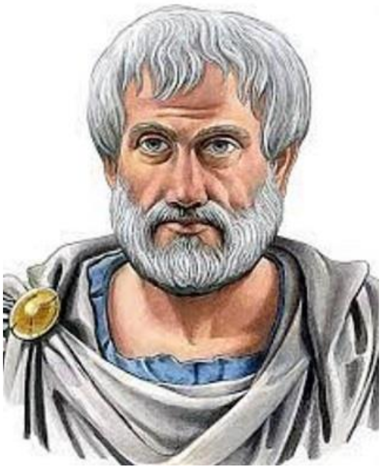
U djelu *Timej* Platon povezuje četiri osnovna elementa, zemlju, zrak, vatru i vodu s jednim trodimenzionalnim oblikom. Tako je povezao tetraedar s vatrom, heksaedar (kocku) sa zemljom, oktaedar sa zrakom, a ikozaedar s vodom (Dadić, 1992:30).

Isto tako kada Platon u *Timeju* kaže da zemlja, voda, zrak i vatra nisu krajnji dijelovi stvari koje nas okružuju, on smatra da postoje još elementarniji dijelovi koji čine bit svega što postoji. Da bi povezanost između osnovnih elemenata i pravilnih geometrijskih tijela bila potpuna, Platon je dodao peti element koji je nazvan eter i povezao ga s dodekaedrom.

Oplošja pravilnih geometrijskih tijela (tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar) mogu se svesti na pravokutne trokute koji figurativno predstavljaju te elementarnije dijelove od kojih se sastoji sve što nas okružuje, kako tumači Platon u djelu *Timej*.

U modernoj fizici, fizici elementarnih čestica, ta se Platonova ideja pokazala značajnom, tako da je po tome aktualan i danas. Isto tako, u današnjem obrazovnom sustavu primjećujemo utjecaj Platonove Akademije, ne samo u nazivlju obrazovnih ustanova već i u razvijanju kritičkog mišljenja kao cilja obrazovnog sustava.

3.6. Aristotel



Slika 20: Aristotel

Izvor: URL 16.

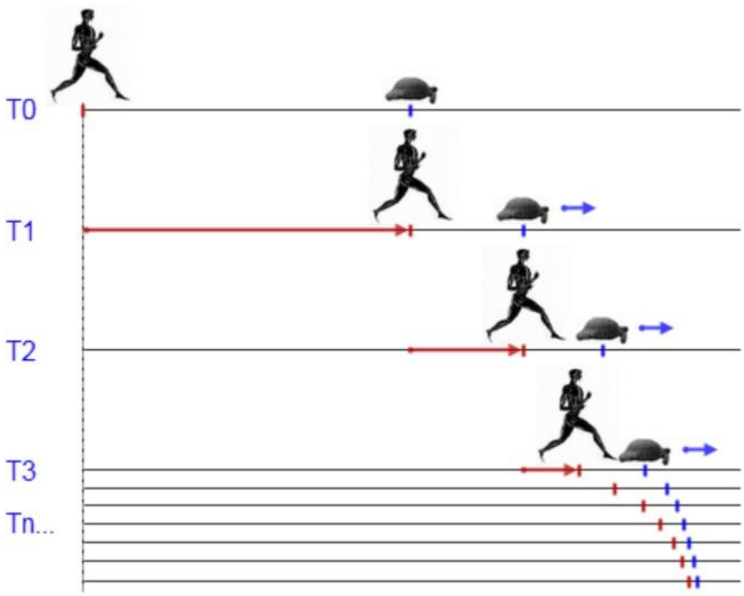
Aristotel je rođen u gradu Stageiri 384. godine prije Krista. Na Platonovoj Akademiji studirao je dvadesetak godina, od punoljetnosti pa do smrti Platona 347. g. pr. Krista.
Nakon naukovanja u Akademiji kralj Filip Makedonski pozvao ga je na dvor da bude učitelj njegova sina Aleksandra, kasnije poznatog kao Aleksandar Veliki (URL 6.).
Aristotel se bavio mnogim znanstvenim disciplinama i utjecao na daljnji razvoj znanosti i filozofije. Proučavao je biologiju, fiziku i matematiku, bavio se etikom i politikom, ali najveći utjecaj ostavio je na području logike.

Uveo je i razrađivao pojmove poput indukcije, dedukcije i silogizma. Pokazao je da se metodom indukcije može doći do novih spoznaja. Indukcija je logička metoda kojom se od pojedinačne stvari dolazi do općeg.

Prvi se bavi oblicima zaključivanja, od kojih je najpoznatiji silogizam.
„*Silogizam je oblik logičkog zaključivanja kojim se iz dvaju ili više već gotovih sudova (premisa) izvodi novi sud (zaključak)*“ (URL 7.).

Aristotel se bavio i pojmom beskonačnosti. Jedan od razloga proučavanja beskonačnosti bio je i taj što je želio opovrgnuti Zenonov paradoks (URL 6.).

Paradoks o Ahileju i kornjači kaže da Ahilej nikada neće prestići kornjaču ukoliko kornjači damo prednost na početku utrke.



Slika 21: Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači

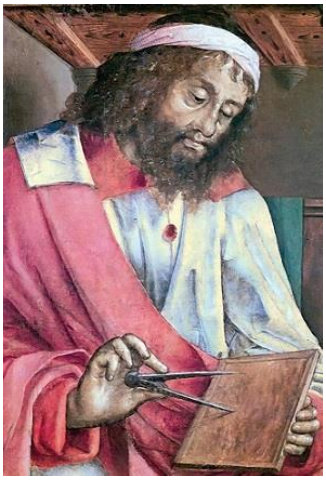
Izvor: URL 17.

Prema slici Ahilej nikad ne bi prestigao kornjaču jer dok Ahilej dođe do točke s koje je krenula kornjača, ona će prijeći neki put i na taj se način utrka nastavlja i Ahilej je uvijek iza kornjače (Hogben, 1970: 85).

U svom djelu *Fizika* Aristotel je utvrdio da, kako se udaljenost smanjuje, smanjuje se i vrijeme potrebno da se prijeđe ta udaljenost. Time je demantirao tvrdnju da je Ahileju potrebno beskonačno vrijeme da prestigne kornjaču.

Danas znamo, a znao je to i Zenon, da će Ahilej sustići kornjaču. Da bi se to matematički i dokazalo, danas se koriste geometrijski redovi.

3.7. Euklid

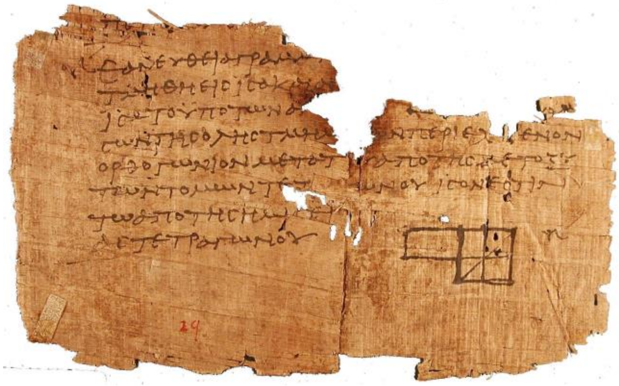


Slika 22: Euklid

Izvor: URL 18.

Euklid, jedan od najpoznatijih grčkih matematičara, rođen je oko 330. g. pr. Krista. O njegovu se životu malo zna, ali se pretpostavlja da je obrazovanje stekao u Platonovoj Akademiji (URL 8.). U svojim tridesetim godinama bio je znanstveno najaktivniji, posebno na području geometrije. U Aleksandriji je osnovao matematičku školu Museion u kojoj razvija nastavnu i znanstvenu djelatnost. Autor je brojnih djela, ali velik broj njih nažalost nije sačuvan (Brückler, 2022: 48).

Njegovo su najznačajnije djelo *Elementi*. Smatra se da su *Elementi*, uz Bibliju, najviše prevođeno, proučavano i objavljivano djelo u povijesti. Iako Euklidov značaj i utjecaj na znanost povezujemo sa *Elementima*, uz njih je napisao još nekoliko značajnih djela. Nažalost, grčki tekst njegovih *Podataka*, zbirka od 94 teorema, uz *Elemente* jedino je djelo o geometriji koje je sačuvano. Sačuvano je i djelo *O dijeljenju* (zadatci o dijeljenju likova), dok je većina ostalih radova izgubljena. Mjesto njegove smrti nije točno utvrđeno, ali smatra se da je umro u Aleksandriji oko 275.g. pr. Krista.



Slika 23: Najstariji sačuvani primjerak Euklidovih *Elemenata* (9. st.)

Izvor: Euklid, (1999)

3.7.1. Elementi

Od svih Euklidovih djela najvažniji su *Elementi*. U tom je djelu Euklid sva dotadašnja znanja iz geometrije izložio po principu Aristotelove i Platonove metode deduktivne znanosti. Dakle, prvo je trebalo utvrditi temeljne pojmove, a zatim odabrati temeljne činjenice (postulate i aksiome). „*Elementi su temeljeni na aksiomima, postulatima i definicijama koje se uzimaju za istinite i ne moraju se dokazivati. Na temelju svega toga su se logičkom dedukcijom izvodile nove činjenice, definicije i teoremi*" (URL 1.).
Elementi su napisani oko 300. g. pr. Kr. i sastoje se od 13 knjiga. U njima je sistematizirano dotadašnje teorijsko znanje iz elementarne geometrije:

- I. − VI. planimetrija
- VII. − IX. geometrijska teorija cijelih brojeva
- X. teorija iracionalnih brojeva
- XI. − XIII stereometrija.

Spomenutim knjigama dodavane su još 14. i 15. knjiga, ali je kasnije utvrđeno da njihov autor nije Euklid, već Hipsiklo i Damaskije.

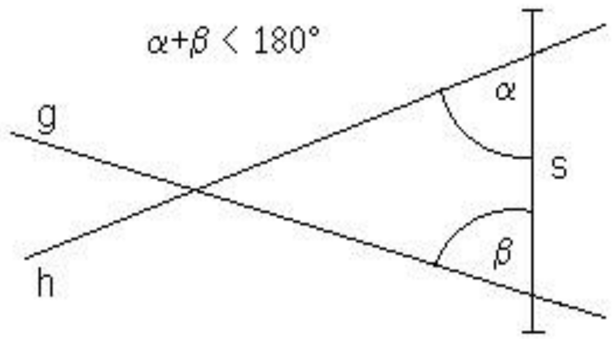
U *Elementima* nema ništa o krivuljama 2. reda (elipsa, parabola, hiperbola) niti o trima klasičnim konstruktivnim problemima (udvostručenje kocke, kvadratura kruga, trisekcija kuta). Isto tako nema nikakvih računa ni praktičnih primjera.

„*Prva je knjiga temelj cijelog djela Elementi, slobodno možemo reći i najvažniji dio. U prvoj knjizi Euklid definira osnovne pojmove u geometriji ravnine - točku, dužinu i ravninu*" (URL 1.).

U svim knjigama ima ukupno 118 definicija, od kojih njih 23 u prvoj knjizi (Euklid, 1999: 1-3).

Prvih 7 definicija često je osporavano, a njihov logički nedostatak primijetio je i sam Euklid, pa ih kasnije ne upotrebljava. Tim početnim definicijama htio je dati samo zornu predodžbu o apstraktnosti osnovnih pojmova. U grupu problematičnih možemo svrstati i 17. definiciju, dok su ostale potpuno ispravne. Naime, tvrdnja da promjer kruga raspolavlja taj krug lako je dokaziva pomoću svojstava promjera kruga danih u prvom dijelu 17. definicije.

U prvoj knjizi susrećemo i 5 postulata (Euklid, 1999: 3). Najznačajniji je 5. postulat tzv. postulat o paralelama:



Slika 24: Postulat o paralelama

Mnogi starogrčki matematičari pokušavali su dokazati da je ovaj postulat ustvari teorem. Matematičar iz 1. st. pr. Kr. Posidonije predlagao je zamjenu Euklidove definicije paralelnih pravaca definicijom paralela kao pravaca koji leže u istoj ravnini i imaju stalan međusobni razmak.

Komentator Euklidovih *Elemenata* Proklo (411. - 485. g.) u svojim komentarima *Elemenata* kritizirao je Ptolemeja zbog pogrešnog dokaza petog postulata i dao svoj dokaz, također pogrešan. Danas znamo da u euklidskoj geometriji vrijedi pet Euklidovih postulata, pa tako i postulat o paralelama, ali da postoje i neeuklidske geometrije – projektivna, nearhimedska, nedezargovska, sferna, eliptička te hiperbolička geometrija u kojima nema tog postulata (Pavković i Veljan, 2004: 177).

„Pod neeuklidskom geometrijom obično se podrazumijeva hiperbolička geometrija ili geometrija Lobočevskog. Nikolaj Ivanovič Lobočevski izgradio je geometrijski sustav koji se zasnivao na negaciji petog Euklidova postulata.“ (Pavković i Veljan, 2004: 201)

Neeuklidske geometrije ukazale su na mogućnost postojanja prostora različitih od tradicionalnog te našle svoju primjenu u teoriji relativnosti.

Prva knjiga sadrži i 5 aksioma, vidi (Euklid, 1999: 3). Pogledamo li Euklidove postulate i aksiome, nije posve jasna razlika između njih. U raznim izdanjima Elemenata raspored postulata i aksioma, kao i njihov broj, razlikuju se. Često su neki postulati proglašeni aksiomima. Prema današnjem shvaćanju možemo reći da su aksiom i postulat sinonimi, tj. da među njima nema razlike.

Euklidova aksiomatika ima određenih nedostataka i za dokazivanje pojedinih tvrdnji nisu bili dovoljni aksiomi i teoremi, već se bilo potrebno pozivati i na očigledne tvrdnje prikazane crtežima. Ti nedostatci riješili su se razvojem matematike osobito tijekom 19. stoljeća te je Euklidova aksiomatika nadopunjena manjim brojem aksioma o poretku, sukladnosti i neprekidnosti.

U odnosu na prvu knjigu *Elemenata* ostale su manje značajne.

Sadržaj druge knjige sastoji se od tvrdnji o algebarskim odnosima geometrijskih veličina, koje su izrečene geometrijskim jezikom jer u Euklidovo vrijeme algebre nije bilo.

U trećoj knjizi Euklid obrađuje 37 propozicija o planimetriji kružnice i kruga. Simetrija kruga oduvijek je impresionirala grčke matematičare, kružnicu su smatrali najsavršenijim geometrijskim likom, a kuglu najsavršenijim geometrijskim tijelom. U trećoj knjizi dokazuju se tvrdnje o raznim odnosima lukova, tetiva, tangenata i kutova kod kružnica (Euklid, 1999: 246).

Četvrta knjiga sadrži 16 propozicija za konstrukciju pravilnih poligona. U njoj se proučavaju odnosi koji se pojavljuju pri upisivanju i opisivanju raznih likova kružnicama i kružnica likovima.

Peta knjiga *Elemenata* razrađuje teoriju omjera i proporcija kroz 25 propozicija.
U šestoj knjizi treba komentirati samo nekoliko činjenica. U definiciji 2 radi se o omjeru zlatnog reza oblika (a+b) : a = a : b. U propozicijama 19 i 20 spominje se dvostruki omjer, u biti misli se na omjere u drugoj potenciji (Euklid, 1999: 247).

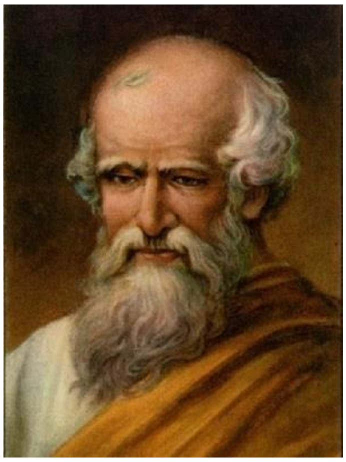
U sedmoj knjizi bavi se teorijom brojeva. Jedna od važnijih propozicija u njoj je ona za određivanje najvećeg zajedničkog višekratnika.

Danas postupak pronalaženja najvećeg zajedničkog djelitelja dva broja, dvaju polinoma ili dviju dužina nazivamo Euklidov algoritam.

Osma knjiga u 27 propozicija govori o proporcijama s prirodnim brojevima. Deveta sadrži propozicije o parnim, neparnim, prostim i složenim brojevima (Brückler, 2022: 51).

Deseta se bavi iracionalnim brojevima.
Jedanaesta i dvanaesta knjiga bave se stereometrijom dok o pravilnim poliedrima govore propozicije u trinaestoj knjizi (Brückler, 2022: 51).

3.8. Arhimed



Slika 25: Arhimed

Izvor: URL 19.

Arhimed je rođen u Sirakuzi 287. g. pr. Krista. Bio je grčki fizičar, astronom i matematičar. Prva znanja iz astronomije i matematike usvojio je od oca Fidija (Faj, 1999: 24).

Najveći dio života Arhimed proveo je u rodnoj Sirakuzi, ali je i putovao i usvajao znanja poznatih matematičara. Dio svog naukovanja proveo je u Aleksandriji u društvu matematičara Eratostena.

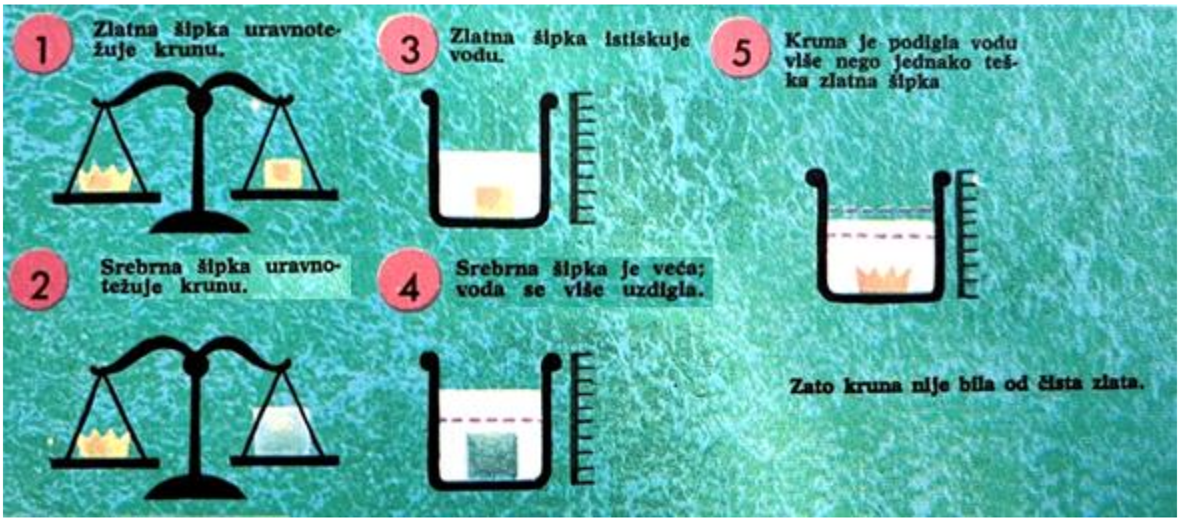
Zaslužan je i za mnoge zakone fizike, primjerice zakon uzgona dobio je ime po njemu i poznajemo ga kao Arhimedov zakon.

Naime Hijeron, kralj Sirakuze, posumnjao je da je prevaren i da mu kruna nije od čistog zlata te tražio od Arhimeda da mu to provjeri. Arhimeda je dugo mučio taj problem i riješio ga je jednog dana ušavši u kadu. Opazio je kako se razina vode podigla, i to za onoliko koliki je volumen njegova tijela. Izašao je iz kupaonice i po ulicama Sirakuze vikao: *Heureka! Heureka!*, što znači: *Našao sam!, Našao sam!* (Adler, 1973: 125)

Arhimed je prvo izmjerio masu krune. Nakon toga pronašao je grumen zlata koji je težio koliko i kruna. Za test mu je trebao i grumen srebra težine identične masi krune.

Krunu je potopio u posudu s vodom te izmjerio koliko se podigla razina vode. To je isto učinio i s grumenom zlata. Da je kruna bila od čistog zlata, voda bi se podigla do identične razine. Međutim, postojala je razlika pa je Arhimed, izmjerivši i razinu što ju je istisnuo grumen srebra, mogao izračunati koliki je bio odnos između zlata i srebra u kruni“ (Adler, 1973: 125).

Iz te Arhimedove metode proizašao je Arhimedov zakon poznat i kao osnovni zakon hidrostatike: *„Tijelo uronjeno u tekućinu lakše je za masu istisnute tekućine.“*



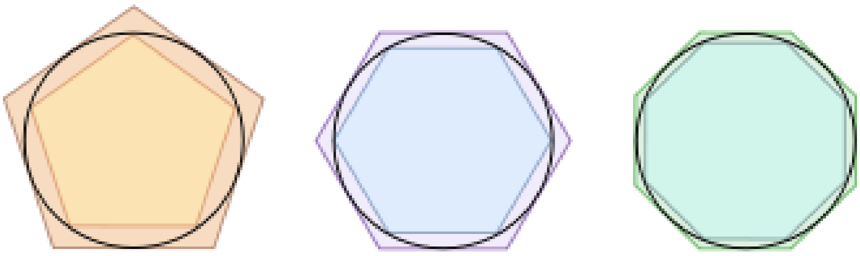
Slika 26: Arhimedov pokus s krunom

Izvor: Adler, I. (1973)

Najveću slavu Arhimed je stekao svojim saznanjima o zaobljenim geometrijskim tijelima. Izračunao je površinu i opseg kruga, površinu odsječka parabole, volumen kugle te površinu elipse.

Pri tome se služio metodom koja je slična današnjem infinitezimalnom računu pa Arhimeda možemo smatrati i začetnikom integralnog računa.

„Upisivanjem pravilnih mnogokuta od 5, 6, 8, 12, 24, 38 i 96 stranica u krug kao i njihovim opisivanjem oko kruga Arhimed je izračunao da se vrijednost broja π nalazi u području između $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, što odgovara približnoj vrijednosti $\pi \approx 3.14$“ (Brückler, 2022: 72).



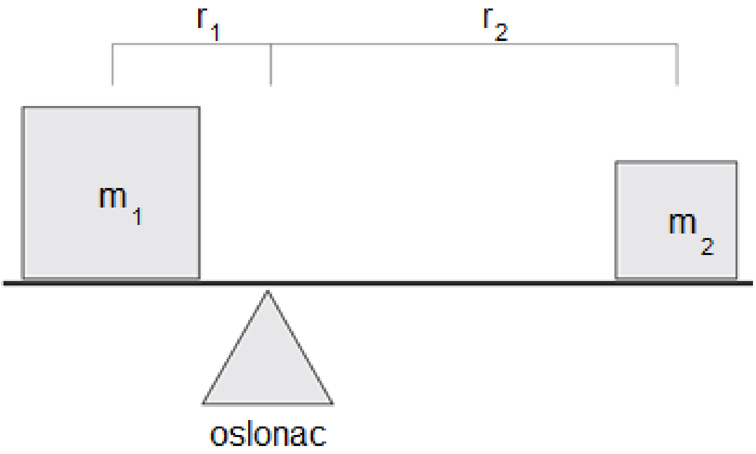
Slika 27: Određivanja vrijednosti broja π

Korištenjem slične metode i na druge slučajeve kako u ravnini tako i u prostoru, Arhimed je došao do površina raznih geometrijskih likova te volumena tijela, kao i određivanja položaja njihova težišta. Posebno je važna njegova spoznaja da se volumeni valjka, kugle i stošca jednakih polumjera i visina odnose kao 3 : 2 : 1.

Metodom iscrpljivanja Arhimed je računao površinu 2000 godina prije otkrića infinitezimalnog računa. Možemo reći da je Arhimed svojim metodama izračuna površine likova i volumena tijela postavio temelje integriranja.

Kao genijalni fizičar, Arhimed je zaslužan i za zakon poluge kojeg možemo zapisati kao:

$$\mathbf{m_1\, r_1 = m_2\, r_2}$$



Slika 28: Zakon poluge

Kad je poluga u pitanju legendarna je Arhimedova izjava:

„Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu pa ću pomaknuti Zemlju!“

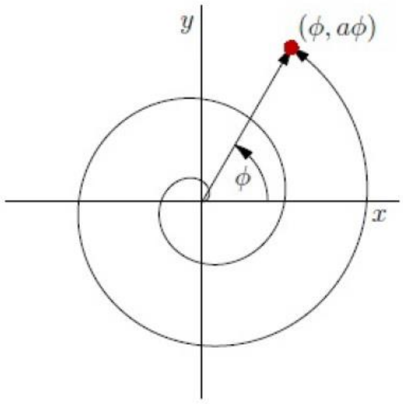
Slika 29: Ilustracija Arhimedova pomicanja Zemlje polugom

Izvor: Adler, I. (1973).

„Mnoga Arhimedova djela sačuvana su bilo u grčkom originalu, bilo u arapskom prijevodu: *O mjerenju kruga, O kugli i valjku, O spiralama, O kvadraturi parabole, O ravnoteži ravninskih likova, O plovećim tijelima, O konoidama i sferoidama, Metoda mehaničkih teorema, Stomahion, Pješčanik*.“ (Brückler, 2022: 66)

U svom djelu *O spiralama* Arhimed je opisao spiralu koju danas nazivamo Arhimedova spirala. Udaljenost svake točke Arhimedove spirale od ishodišta, proporcionalna je kutu zaokreta (Hogben, 1970: 117).

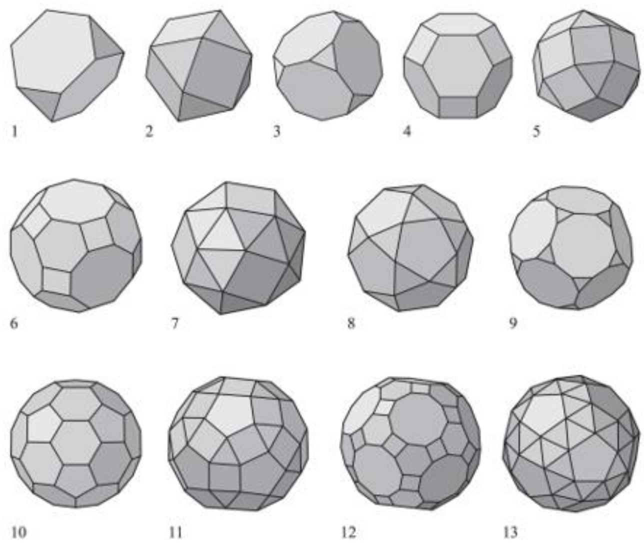
$$r = a\phi.$$



Slika 30: Arhimedova spirala

Izvor: Adler, I. (1973).

Starogrčki matematičar iz Aleksandrije, imena Papo, u svom djelu *Zbornik radova* opisao je tijela koja nazivamo Arhimedovi poliedri. To su tijela čije su sve stranice pravilni mnogokuti. Sredinom 20. stoljeća pronađen je i 14. Arhimedov poliedar. Dio zasluga za taj pronalazak ima i hrvatski matematičar Stanko Bilinski.

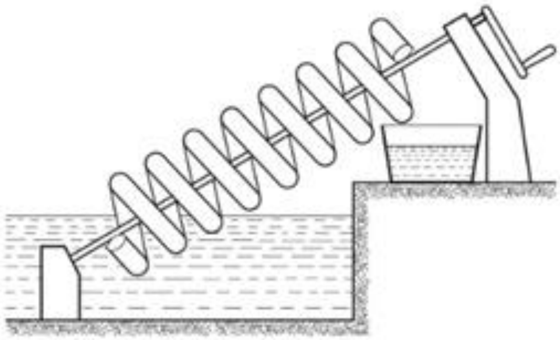


1. krnji tetraedar, 2. kuboktaedar, 3. krnja kocka, 4. krnji oktaedar, 5. rombokuboktaedar, 6. veliki rombokuboktaedar, 7. skošena kocka, 8. ikosadodekaedar, 9. krnji dodekaedar, 10. krnji ikosaedar, 11. rombikosadodekaedar, 12. veliki rombikosadodekaedar, 13. skošeni dodekaedar

Slika 31: Arhimedova tijela

Izvor: URL 20.

Arhimed je bio izvrstan fizičar i izumitelj. Postoji legenda da je za obranu rodne Sirakuze od Rimljana konstruirao razne ratne sprave - najjači katapult i zrcala s pomoću kojih su paljeni rimski brodovi. Izumio je i tzv. Arhimedov vijak, koji je ustvari bio crpka za vodu. Pri okretanju voda se kroz vijak diže od spremnika prema gore i curi kroz otvor vršnog zavoja (Faj, 1999: 27).



Slika 32: Arhimedov vijak

Izvor: URL 21.

Svaku svoju tvrdnju Arhimed je logički provjeravao i dokazivao. Pri dokazivanju koristio se aksiomom kojeg danas nazivamo Arhimedov aksiom:

Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ *postoji takav prirodni broj n da je:* $n\,b > a$ (Brückler, 2022: 46).

Prema legendi Arhimeda je usmrtio rimski vojnik prilikom pada Sirakuze u vrijeme Drugog punskog rata. Prema zapisu povjesničara Plutarha Arhimed je razmatrao neki geometrijski problem crtajući krugove na pijesku kad mu je pristupio rimski vojnik i naredio da pođe s njim. U žaru traganja za rješenjem geometrijskog problema Arhimed je to odbio i upozorio vojnika neka ne dira njegove krugove, na što je vojnik potegao mač i pogubio Arhimeda.

Dakle, prema legendi, posljednje su Arhimedove riječi bile: „*Ne dirajte moje krugove!*“ odnosno u originalu na latinskom: *„Noli turbare circulos meos!“*

3.9. Tri klasična problema starogrčke matematike

Značajan dio starogrčke matematike predstavljale su geometrijske konstrukcije. „*Platonova Akademija postavlja pravilo da se konstrukcije vrše isključivo ravnalom i šestarom. Ravnalo se koristilo za spajanje dviju točaka, a šestar za crtanje kružnica, kojima je bilo zadano središte i polumjer.*

Navedeni pristup geometrijskim konstrukcijama doveo je do niza matematičkih problema, a najpoznatija su tri:

1. *udvostručenje kocke*
2. *kvadratura kruga*
3. *trisekcija kuta.*

Pri pokušaju rješavanja tih problema starogrčki matematičari došli su do niza novih spoznaja.“ (Jankov i Papić, 2012: 11)

3.9.1. Udvostručenje kocke

Udvostručenje kocke ili tzv. delski problem jedan je od triju klasičnih problema starogrčke matematike odnosno geometrije. „*Delski problem traži da se koristi samo ravnalo i šestar, konstruira stranica kocke kojoj je volumen dvostruko veći od volumena zadane kocke.*

Nastanak delijskog problema povezan je uz mit prema kojem je proročica delfskoga proročišta u doba epidemije kuge savjetovala stanovnicima otoka Dela da u čast Apolonu izgrade novi oltar u obliku kocke, ali dvostruko većeg volumena od postojećeg.“ (URL 9.)

Druga pak legenda kaže da je problem nastao kad je kralj Minos želio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa koji je bio u obliku kocke.

Atenjani su naivno udvostručili stranicu kocke i time dobili kocku 8 puta većeg volumena te kuga nije bila zaustavljena. U biti problem se svodi na geometrijsku konstrukciju rješenja kubne jednadžbe (URL 9.):

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2}\,a$$

a to je, kako je u 19. st. i dokazano, samo s pomoću ravnala i šestara neizvedivo. Mnogobrojni uzaludni pokušaji rješavanja toga problema, primjerice pitagorejca Hipokrata, Menehma te Nikomeda, učinili su delski problem jednim od poznatijih matematičkih problema stare Grčke.

Hipokrat je bio među prvima koji je došao do približnog rješenja. „*Došao je do zaključka da je udvostručenje kocke duljine stranice* a *moguće ako je moguće konstruirati srednje geometrijske proporcionale između dužina* a *i* $2a$.

Poznato je da su srednje geometrijske proporcionale između dužina a *i* b *u biti dužine* x *i* y *za koje vrijedi:*

$$a : x = x : y = y : b$$

U našem je slučaju $b = 2a$ *pa dobivamo da je:* $x = \sqrt[3]{2}\,a$, *što je duljina stranice kocke dvostrukog volumena. Time se problem udvostručenja kocke svodi na konstrukciju broja* $\sqrt[3]{2}$.

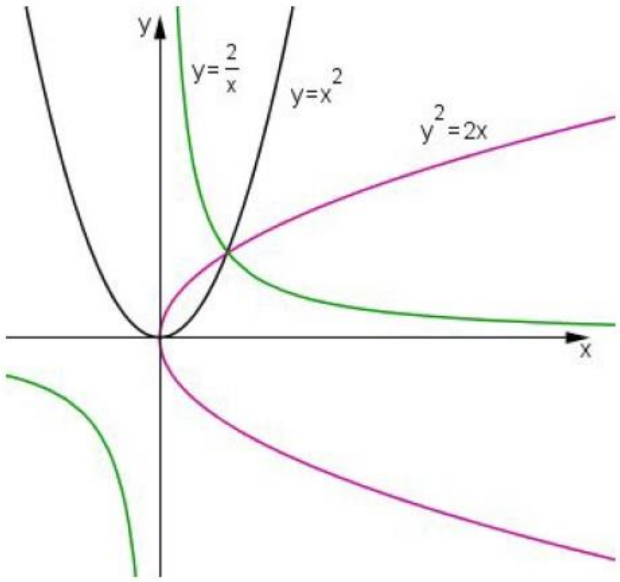
Od jednakosti $a : x = x : y = y : b$ *krenuo je i Menehmo te je rješavajući problem otkrio konike – elipsu, hiperbolu i parabolu. Iz jednakosti je dobio:*

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab.$$

U specijalnom slučaju kad je $a = 1$ *i* $b = 2$ *dobivamo:*

$$x^2 = y, \quad y^2 = 2x, \quad xy = 2.$$

Prikažemo li grafički dobivene krivulje dobivamo presjek, točku s x *koordinatom* $\sqrt[3]{2}$, *što predstavlja i rješenje problema.*“ (Jankov i Papić, 2012: 15)



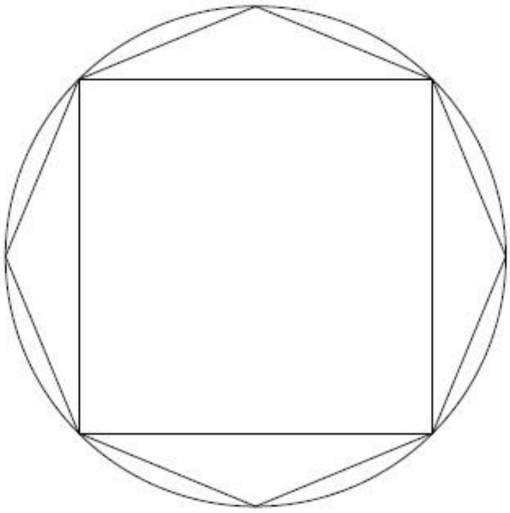
Slika 33: Menehmovo rješenje problema udvostručenja kocke

Izvor: Jankov, D. i Papić I. (2012)

Ovo se rješenje u 4. st. pr. Kr. nije moglo konstruirati samo ravnalom i šestarom, a to nije moguće ni danas, što je dokazao P. L. Wantzel 1837. godine.

3.9.2. Kvadratura kruga

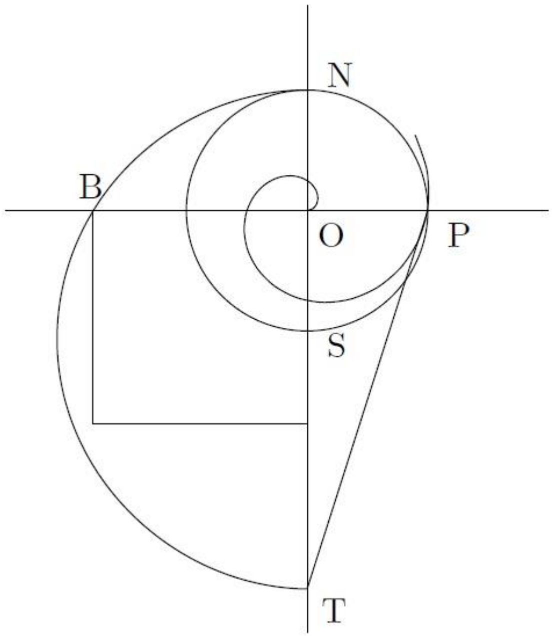
Kvadratura kruga, jedan od klasičnih geometrijskih problema, traži da se samo s pomoću ravnala i šestara konstruira kvadrat po površini jednak zadanom krugu (Brückler, 2022: 33).
Rješavanje tog problema, iako nije dovelo do traženoga rezultata, razvilo je i unaprijedilo geometriju i matematiku tog doba. Problemom su se bavili brojni matematičari stare Grčke, među ostalima i Anaksagora, Antifont, Brison, Hipokrat te Arhimed.
Antifon je metodom iscrpljenja ili ekshaustije tražio površinu kruga. Takvim pristupom približavao se sve bliže stvarnoj površini kruga ali kako učenici Platonove Akademije nisu prihvaćali beskonačnost Antifonov postupak nije rezultirao rješenjem problema (Jankov i Papić, 2012: 12).



Slika 34: Antifontovo rješenje kvadrature kruga

Arhimed je u svom djelu *O spiralama* opisao spiralu koju danas nazivamo Arhimedova spirala. To je u biti krivulja koja nastaje kad točka, polazeći iz ishodišta, obilazi oko ishodišta i jednako se udaljava od njega. Udaljenost svake točke Arhimedove spirale od ishodišta, proporcionalna je kutu zaokreta, $r = a\varphi$.
Arhimed je u djelu *Mjerenje kruga* dokazao da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta čije su katete jednake polumjeru i opsegu kruga (Jankov i Papić, 2012: 13).

Primjenjujući taj dokaz, konstruirao je jedinični krug čije je središte točka O te u njemu spiralu kojoj je O ishodišna točka. Nakon punog okretaja spirala siječe početni krug u točki P.



Slika 35: Arhimedovo rješenje kvadrature kruga

Izvor: Jankov, D. i Papić I. (2012)

Nakon toga konstruira okomicu u točki O na pravac OP, te s N označio njen presjek s kružnicom. Kroz točku P povukao je tangentu na spiralu i njen presjek s povučenom normalom označio je s T.

Prema Arhimedovim tezama u djelima *O spiralama* i *Mjerenje kruga* vrijedi da je $|OT| = \pi$.

Polovište dužine NT označio je sa S te je opisao krug k (S, |ST|) kako bi dobio korijen iz π *, jer je* $|OT| * |ON| = |OB|^2$. *Na kraju je s dobivenom stranicom konstruirao kvadrat jednake površine kao i krug.*

Ovim postupkom Arhimed nije došao do rješenje problema kvadrature kruga jer spiralu nije moguće konstruirati koristeći se samo ravnalom i šestarom, ali je došao do u to doba najpreciznije aproksimacije broja π *i postavio nejednakost* $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ (Jankov i Papić, 2012: 13-14).

Tek u 19. stoljeću, točnije 1882., Carl Louis Ferdinand von Lindemann dokazao je da je broj π transcedentan broj, tj. da ga nije moguće konstruirati uz pomoć samo ravnala i šestara kako su zahtijevali stari Grci. Dakle, problem kvadrature kruga je nerješiv.

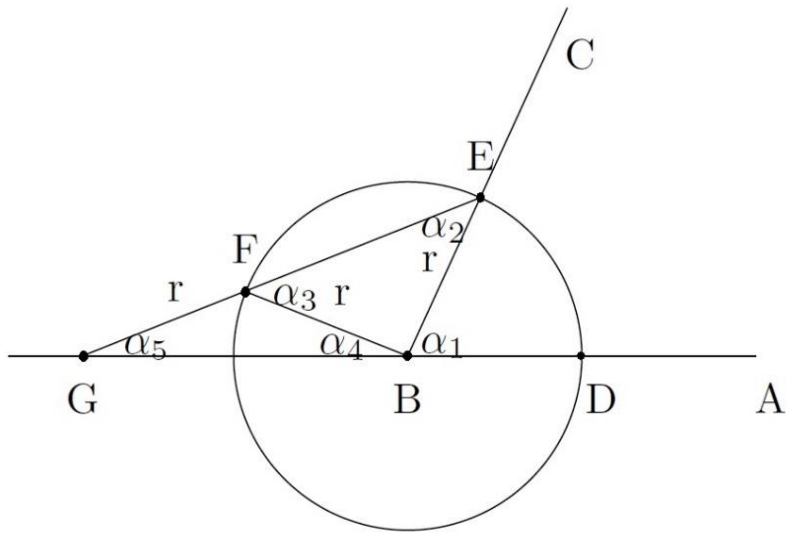
3.9.3. Trisekcija kuta

Trisekcija kuta predstavlja geometrijski problem u kojem se traži da se zadani kut podijeli na tri jednaka dijela uz pomoć samo ravnala i šestara (Brückler, 2022: 33).

Problem je općenito nerješiv, što je i dokazano algebarskim metodama u 19. stoljeću, odnosno rješiv je samo u nekim specijalnim slučajevima, npr. za kutove od 27°, 45° i 90° (Jankov i Papić, 2012: 16).

Od klasičnih najpoznatije je Arhimedovo rješenje s pomoću šestara i ravnala koje je imalo označene jedinice. Budući da je ravnalo imalo označene jedinice, rješenje nije bilo u okvirima postavljenih uvjeta konstrukcije, ali predstavlja značajan pokušaj rješavanja problema.

Arhimed je krenuo od proizvoljnog šiljastog kuta ABC, kuta α_1, te oko vrha B opisao kružnicu proizvoljnog radijusa.



Slika 36: Arhimedovo rješenje trisekcije kuta

Izvor: Jankov, D. i Papić I. (2012)

Presjeke opisane kružnice s krakovima kuta α_1 označimo s D i E. Postavimo ravnalo kroz točku E tako da u točki G presijeca pravac AB, a u točki F kružnicu tako da je dužina FG jednaka duljini radijusa r. Na taj smo način dobili kut AGE tj. kut α_5 koji je jednak trećini kuta α_1, odnosno vrijedi da je $3\alpha_5 = \alpha_1$ (Jankov i Papić, 2012: 18).

Tvrdnja $3\alpha_5 = \alpha_1$ može se dokazati koristeći se svojstvima vanjskog kuta trokuta GBE i GBF.

Dakle, vrijede jednakosti:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_5$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5$$

Trokut GBF je jednakokračan s krakovima dužine r. Iz toga slijedi da je $\alpha_4 = \alpha_5$, pa iz jednakosti $\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5$ dobivamo:

$$\alpha_3 = 2\alpha_5$$

Trokut FBE isto je tako jednakokračan, pa vrijedi da je $\alpha_2 = \alpha_3 = 2\alpha_5$.

Uvrštenjem dobivamo da je $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_5 = 2\alpha_5 + \alpha_5 = 3\alpha_5$.

Tvrdnja $3\alpha_5 = \alpha_1$ je time dokazana.

Problemom trisekcije kuta bavili su se i ostali značajni starogrčki matematičari, među prvima Hipokrat s Hiosa te Hipija iz Elide. U 4. stoljeću poslije Krista problemom se bavio i Papus iz Aleksandrije, ali tek su matematičari 19. i 20. stoljeća dokazali da je problem općenito nerješiv konstrukcijom samo ravnalom i šestarom, odnosno da je rješiv samo u specijalnim slučajevima.

4. Zaključak

Od najranije povijesti ljudi su mjerili, prebrojavali, trgovali i gradili. U svim tim radnjama susretala se matematika i njeno poznavanje omogućavalo je da se uspješnije riješe brojni problemi. Pojavom pisma pojavljuju se prvi matematički zapisi te se razvijaju brojevni sustavi i znamenke što je olakšalo daljnji razvoj matematike. Usvajajući i razvijajući znanja od starijih civilizacija, posebno Egipćana i Sumerana, stari Grci izgradili su matematiku od empirijske u znanstvenu disciplinu. Period stare Grčke, koji tradicionalno počinje s prvim olimpijskim igrama 776. g. pr. Krista i traje do smrti Aleksandra Velikog 323. g. pr. Krista, predstavljao je najplodnije razdoblje u povijesnom razvoju matematike. To je period u kojem je Tales postavio svoje teoreme, Pitagora dokazao svoj poučak, a Euklid napisao djelo Elementi koje je gotovo dvije tisuće godina bilo glavni udžbenik matematike. I danas su u kurikulumu matematike imena Talesa, Pitagore i Euklida nezamjenjiva. Njima su u razvoju matematike i razvijanju kritičkog mišljenja, što je i danas jedan od osnovnih ciljeva obrazovnih ustanova, svojim dostignućima iz logike i filozofije, pomogli Aristotel i Platon.

Naziv Platonove škole Akademija i danas susrećemo u nazivima najviših znanstvenih ustanova, pa tako i u Hrvatskoj akademiji znanosti i umjetnosti (HAZU), koja je najviša kulturna i znanstvena institucija u našoj državi.

Područje stare Grčke se zbog dostignuća postignutih kako na području matematike, tako i na području filozofije, fizike, logike, arhitekture i politike, s pravom smatra kolijevkom zapadne civilizacije i temeljem kulture kojoj danas pripadamo.

5. Literatura

Adler, I. (1973). Matematika od zlatnog reza do nauke o skupovima, prevela Ida Matulić Bedenić. Zagreb: Školska knjiga.

Brückler, F. M. (2014). Povijest matematike I (izmijenjeno i dopunjeno izdanje). Osijek: Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.

Brückler, F. M. (2022). Povijest matematike. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek.

Dadić, Ž. (1992). Povijest ideja i metoda u matematici i fizici. Zagreb: Školska knjiga.

Dvornik, J. (2011). Grčki brojevi, časopis Nova Akropola, br. 66. https://nova-akropola.com/mozaik/zanimljivosti/starogrcki-brojevi (preuzeto 2.7.2023.)

Euklid, (1999). Elementi I – VI, prevela Maja Hudoletnjak Grgić. Zagreb: Kruzak d.o.o.

Faj, Z. (1999). Pregled povijesti fizike. Osijek: Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera, Pedagoški fakultet Osijek.

Hogben, L. (1970). Sve o matematici. Zagreb: Mladost.

Hrvatska enciklopedija, (2021). Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

Jankov, D. i Papić I. (2012). Tri klasična problema, Osječki matematički list, br. 12, 11-19.

Kalina, B. (1985). Povijest filozofije. Zagreb: Školska knjiga.

Komarova, N. (2015). Matematika kroz prošlost, časopis Nova Akropola, br. 8. https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/matematika-kroz-proslost (preuzeto 5. 7. 2023.)

Paić, G., Bošnjak, Ž., Čulina, B., Grgić N. (2021). Matematički izazovi 8, Zagreb: Alfa

Pavković, B., Veljan, D. (2004). Elementarna matematika 1. Zagreb: Školska knjiga.

Struve, V. V., Kalistov, D. P. (1962). Stara Grčka. Sarajevo: Veselin Masleša

Internetski izvori

URL 1. : https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=18596 (preuzeto 20.7.2023), Elementi (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 2. : https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=48474 (preuzeto 14.7.2023), Pitagora (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 3. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=48642 (preuzeto 18.7.2023.), Platon (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 4. : https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=3843 (preuzeto 21.7.2023), Aritmetika (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 5. : https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=62271 (preuzeto 22.7.2023), Trigonometrija (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 6. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=3834 (preuzeto 15.7.2023.), Aristotel (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 7. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=55972 (preuzeto 21.7.2023), Silogizam (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 8. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx? ID=18593 (preuzeto 21.7.2023), Euklid (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 9. : https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=14431 (preuzeto 1.8.2023), Delski problem (2021), Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Zagreb: Leksikografski zavod Miroslav Krleža.

URL 10. : https://hr.wikipedia.org/wiki/Stara_Grčka

URL 11. : https://www.znanje.org/i/i26/06iv01/06iv0119/tales.html

URL 12. : https://www.matematika.edu.rs/zanimljiva-matematika-piramida-u-gizi

URL 13. : https://www.galaksija.hr/tekst/Pitagora/1093

URL 14. : https://nova-akropola.com/filozofija-i-psihologija/filozofija/platon-i-akademija/

URL 15. : http://www.grad.hr/sgorjanc/udzbenik/2/2-1-3.html

URL 16. : https://mir.az/yazar/180-aristotel-kimdir-aristotel-haqqinda-melumat.html

URL 17. https://steemit.com/tr/@buyukalcikaya/achilles-ve-kaplumbaga-paradoksu

URL 18. : https://hr.wikipedia.org/wiki/Euklid

URL 19. : https://vedicmathschool.medium.com/world-mathematician-archimedes-2ff605940d6b

URL 20. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=70095

URL 21. : http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=3754

6. Popis ilustracija

Slika 1: Kost babuna sa 29 rezova 2
Slika 2: Znamenke sumeranskog seksagezimalnog brojevnog sustava 3
Slika 3: Dokaz iz euklidove knjige Elementi 4
Slika 4: Područje stare Grčke 7
Slika 5: Akrofonske znamenke 8
Slika 6: Broj 258 zapisan akrofonskim znamenkama 8
Slika 7: Starogrčki alfabetski sustav 9
Slika 8: Tales 10
Slika 9: Računanje visine piramide pomoću sjene 11
Slika 10: Teorem o proporcionalnosti 11
Slika 11: Pitagora 13
Slika 12: Trokutni brojevi 14
Slika 13: Kvadratni brojevi 14
Slika 14: Pitagorin poučak 15
Slika 15: Dokaz Pitagorina poučka 16
Slika 16: Iracionalan broj 17
Slika 17: Platon 18
Slika 18: Trigonometrijske funkcije 19
Slika 19: Platonova tijela 21
Slika 20: Aristotel 22
Slika 21: Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači 23
Slika 22: Euklid 24
Slika 23: Najstariji sačuvani primjerak Euklidovih Elemenata (9.st.) 24
Slika 24: Postulat o paralelama 26
Slika 25: Arhimed 28
Slika 26: Arhimedov pokus s krunom 29
Slika 27: Određivanje vrijednosti broja π 29
Slika 28: Zakon poluge 30
Slika 29: Ilustracija Arhimedova pomicanja Zemlje polugom 30
Slika 30: Arhimedova spirala 31
Slika 31: Arhimedova tijela 31

Slika 32: Arhimedov vijak 32
Slika 33: Menehmovo rješenje problema udvostručenja kocke 34
Slika 34: Antifontovo rješenje kvadrature kruga 35
Slika 35: Arhimedovo rješenje kvadrature kruga 36
Slika 36: Arhimedovo rješenje trisekcije kuta 37