

# Vrednovanje problemskih zadataka u nastavi matematike

---

**Gulić, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zadar / Sveučilište u Zadru**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:162:188214>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-31**



**Sveučilište u Zadru**  
Universitas Studiorum  
Jadertina | 1396 | 2002 |

*Repository / Repozitorij:*

[University of Zadar Institutional Repository](#)



zir.nsk.hr



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJ

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za razrednu nastavu

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje



**Ana Gulić**

**Vrednovanje problemskih zadataka u nastavi  
matematike  
Diplomski rad**

Zadar, 2023.

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja. Odsjek za razrednu nastavu

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

# **Vrednovanje problemskih zadataka u nastavi matematike**

**Diplomski rad**

Studentica: Ana Gulić

Mentorica: doc. dr. sc. Maja Cindrić

Zadar, 2023

## Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, **Ana Gulić**, ovime izjavljujem da je moj **diplomski rad** pod naslovom **Vrednovanje problemskih zadataka u nastavi matematike** rezultat mojega vlastitoga rada, da se temelji na mome istraživanju te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Niti jedan dio moga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mojega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenog i nakon obrane uređenog rada.

Zadar, 2023.

## **Zahvala**

*Zahvaljujem se svojoj obitelji na neizmornoj podršci na putu da postanem ono što sam oduvijek željela. Prijateljima koji su mi dane studiranja učinili nezaboravnima i mentorici doc. dr. sc. Maji Cindrić na pomoći i savjetima pri izradi diplomskog rada te djeci i učiteljicama koje su pristali biti sudionici istraživanja.*

# SAŽETAK

## Vrednovanje problemskih zadataka u nastavi matematike

U ovom diplomskom radu kroz teorijski dio se nastojao prikazati povijesni razvoj nastave matematike, usporediti položaj problemskih zadataka kroz tradicionalnu i suvremenu nastavu te se usmjeriti na suvremenu nastavu i problemske zadatke u njoj.

Zatim se kroz prvi dio istraživanja željelo analizirati kako zapravo učenici rješavaju problemske zadatke odnosno koriste li pri rješavanju matematičko ili modeliranje konkretima te kakva je uspješnost učenika pri njihovom rješavanju. Dok su se kroz drugi dio istraživanja nastojali ispitati stavovi učitelja o problemskim zadacima, kakve zadatke smatraju problemskima te kako ih vrednuju odnosno čime se vode pri vrednovanju.

U istraživanju je sudjelovalo 70 učenika razredne nastave kojima su podijeljeni ispiti s problemskim zadacima ovisno o razredu koji trenutno pohađaju to jest sa zadacima prilagođenima njihovom uzrastu. U drugom dijelu istraživanja provedeni su intervjui s dvanaest učiteljica koji su bili podijeljeni u tri dijela: razgovor o problemskim zadacima, prikaz zadataka kako bih vrednovale jesu li oni za njih problemski ili ne te vrednovanje nekih primjera riješenih zadataka.

Analiza učeničkih ispita pokazala je kako ovisno o tipu/vrsti zadatka varira i uspješnost njegova rješavanja pa su tako učenici najmanje uspješni u rješavanju tipa zadataka s redoslijedom računskih radnji u svim razredima. Kod prvih zadataka koji su bili zadaci riječima učenici su uglavnom točno rješavali prvi dio zadatka dok bi se pogreške pojavljivale u sljedećim koracima, uspješnost rješavanja trećih zadataka je bila također niska, ali su se našla neka vrlo zanimljiva rješenja. U prvom razredu se modeliranje konkretima najviše koristilo dok se kroz sljedeće razrede sve manje pojavljivalo i prevladavalo je matematičko modeliranje.

Učiteljice su kroz intervjue pokazale kako na problemske zadatke uglavnom gledaju kao na neke zadatke s riječima i logičke zadatke koje od djece zahtijevaju više razmišljanja. Ponuđene zadatke iz ispita su većinski smatrale problemskima, osim kod drugih zadataka gdje su mišljenja bila podijeljena i naposljetku se trećem dijelu intervjua je dobio uvid u načine vrednovanja.

Ključne riječi: *problemski zadaci, nastava matematike, modeliranje, vrednovanje*

# **ABSTRACT**

## **Evaluation of problem tasks in mathematics class**

In this thesis, through the theoretical part, an attempt was to show the historical development of teaching mathematics, to compare the position of problem tasks in traditional and contemporary teaching, and to focus on contemporary teaching and problem tasks in it.

Through the first part of the research, it was aimed to analyze how students actually solve problem tasks, that is, whether they use mathematics or modeling by drawing when solving this type of tasks, and what is the success rate of students when solving them. The second part of the research sought to examine teachers' attitudes about problem tasks, what kind of tasks they consider to be problem tasks and how they evaluate them, i.e. what they are guided by when evaluating them.

Seventy students (grades one to four) participated in the research and were given exams with problem tasks depending on the grade they are currently attending, that is, with tasks adapted to their age. In the second part of the research, interviews were conducted with twelve teachers. The interviews were divided into three parts: a conversation about problem tasks, a presentation of the tasks for the teachers to evaluate whether they consider them to be problem tasks or not, and evaluation of some examples of solved tasks.

The analysis of student exams showed that depending on the type of task, the success in solving it also varies, so students are the least successful in solving the type of tasks with the order of calculation operations in all grades. In the first tasks, which were word tasks, the students mostly solved the first part of the task correctly, while mistakes appeared in the following steps. The success in solving the third tasks was also low, but some very interesting solutions were found. In the first grade, modeling by drawing was used the most, while in the following grades it appeared less and less and mathematical modeling prevailed.

Through the interviews, the teachers showed that they mostly consider problem tasks to be word tasks and logic tasks that require more thinking from the children. The offered tasks from the exam were seen as problem tasks by the majority of the teachers, except for the second tasks where opinions were divided. Lastly, in the third part of the interview, an insight into the methods of evaluation was obtained.

*Key words: problem tasks, mathematics teaching, modeling, evaluation*

# SADRŽAJ

1.) UVOD .....	1
2.) POVIJESNI RAZVOJ NASTAVE MATEMATIKE .....	2
3) PROBLEMSKI ZADACI U TRADICIONALNOJ I SUVREMENOJ NASTAVI MATEMATIKE .....	8
3.1.) Tradicionalna nastava matematike i problemski zadaci .....	8
3.2.) Suvremena nastava matematike i problemski zadaci .....	9
4.) CILJEVI SUVREMENE NASTAVE MATEMATIKE .....	12
4.1.) Reformatorski procesi i nastava matematike u Republici Hrvatskoj .....	14
4.2.) Matematičko umijeće .....	15
5) MATEMATIČKI ZADACI .....	18
5.1.) Vrste matematičkih zadataka .....	20
5.2.) Problemski zadaci u nastavi matematike .....	22
5.3.) Problemski orijentirana nastava .....	23
5.4.) Uloga učitelja u problemski orijentiranoj nastavi .....	25
5.5.) Rješavanje problemskih zadataka u nastavi matematike .....	28
5.5.1.) Modeliranje u nastavi matematike .....	32
6.) VREDNOVANJE U NASTAVI MATEMATIKE .....	42
7.) METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA .....	47
7.1.) Cilj i problemi istraživanja .....	47
7.2.) Mjerni instrument i uzorak ispitanika .....	47
7.3.) Postupak .....	48
8.) REZULTATI ISTRAŽIVANJA .....	49
9.) ZAKLJUČAK .....	70
10.) LITERATURA .....	72
11.) POPIS SLIKA, TABLICA, GRAFOVA I PRIMJERA .....	81
12.) PRILOZI .....	84
13.) ŽIVOTOPIS .....	100



## 1.) UVOD

Suvremena matematika u sam centar pozornosti stavlja učenika i razvoj njegovih matematičkih znanja, sposobnosti i vještina koje će učenik koristiti u osobnom, profesionalnom i društvenom životu. U skladu s tim, od učitelja se, prema kurikulumu zahtjeva poučavanje različitih matematičkih koncepata i procesa koji će učenicima omogućiti da usvojena znanja i vještine koriste u različitim kontekstima, a kao jedan od koncepata ističe se i rješavanje problema (Baranović, 2021).

Problemski zadatak se definira aktivnost za koju učenik nema unaprijed propisano ili zapamćeno pravilo/metodu te učenik nema percepciju da postoji specifična pravilna metoda rješavanja zadatka ili aktivnosti (Hiebert 1997 prema Van de Wale, i sur. 2010).

Problemski zadaci trebali bi povezati sadržaje matematike i dječje okruženje kako bi djeca oslanjajući se na vlastito iskustvo mogla lakše ih rješavati (Klasnić, 2009) te ti zadaci postaju dobar trening za životne probleme i alat za usvajanje matematičkih koncepata (Cindrić, 2016). Sam cilj rješavanja problemskih zadataka jest da učenik iskoristi problemsku situaciju kao pristup apstrakciji i generalizaciji tj. da razvije sposobnost matematiziranja situacije (Kilpatrick i sur. 2003).

Posljednjih godina kroz kurikularne reforme sve se više prepoznaje važnost problemskih zadataka u nastavi matematike i oni postaju njen važan dio. Uzimajući u obzir njihovu posebnost i karakteristiku da svaki učenik može iznaći svoju jedinstvenu strategiju/postupak rješavanja nekog zadatka, postavlja se pitanje kako učitelji trebaju vrednovati te zadatke.

Slijedom svega navedenog u diplomskom radu će se prvo prikazati povijesni razvoj nastave matematike, a zatim iznijeti položaj problemskih zadataka u tradicionalnoj i suvremenoj nastavi. Potom će biti prikazana razdioba zadataka gdje će se usmjeriti na problemske zadatke, problemski orijentiranu nastavu i ulogu učitelja u njoj te će se iznijeti neki načini vrednovanja.

U nastavku će se prikazati rezultati istraživanja koje je sastavljeno od dva dijela odnosno u prvom dijelu analizirati će se riješeni ispiti s problemskim zadacima dok će se u drugom dijelu prikazati stavovi učiteljica prema problemskim zadacima, koje zadatke smatraju problemskima a koje ne te kako ih vrednuju.

## 2.) POVIJESNI RAZVOJ NASTAVE MATEMATIKE

Kako bi se došlo saznanja o važnosti problemskog pristupa nastavi matematike danas treba prikazati i njen povijesni razvoj jer nam on ukazuje na to kako je nastava matematike od svojih početaka percipirana kao usvajanje proceduralnih znanja. U novije vrijeme proceduralna znanja se stavljaju malo na stranu no ne tako da ih se zanemaruje već se nalaze na jednakoj razini kao i konceptualna znanja, odnosno pokušava ih se povezati. Dobra usvojenost proceduralnih i konceptualnih znanja se može provjeriti jedino kvalitetnim problemskim zadacima iz matematike što je uvidjela i obrazovna politika u Hrvatskoj te u predmetnom kurikulumu za nastavu matematike istaknula problemske zadatke kao jedne od ključnih elemenata vrednovanja. No iskustvo pokazuje kako se učitelji još uvijek ne snalaze u vrednovanju ovog tipa zadataka iz razloga što su tradicionalni načini poučavanja još uvijek duboko uvriježeni u obrazovni sustav. Stoga će se prikazati povijesni razvoj nastave matematike kako bi se uvidio razlog važnosti proceduralnog znanja

Funkcija osnovne škole kao obvezne razine odgojno-obrazovanog sustava jest da osigura stjecanje širokog spektra općeg odgoja i obrazovanja, čime učenici dobivaju ona temeljna znanja koja su im potrebna za život. Na ovoj osnovnoj razini se podučava učenika znanjima i kompetencijama koje će im biti potrebne i korisne za obnašanje raznih uloga u odrasloj dobi, odnosno učenike se osposobljava da otkrivaju i razumiju svijet u kojem žive. Kao jedan od temeljnih predmeta s vrlo dugom tradicijom u osnovnoj školi ističe se i matematika koja je zbog znanja koja pruža bitan faktor za uspješno uključivanje u društvenu zajednicu, rad i gospodarstvo (MZOS, 2006).

Povijest matematike zadire u svaku kulturu i civilizaciju te seže najmanje četiri tisuće godina unatrag. Sama riječ *matematika* potječe od grčkog *mathemata* što bi značilo „*ono što je naučeno*“ te se znala specifično vezati za aritmetiku, glazbu ili astronomiju (Stedall, 2014).

Začetci matematike koju danas poznajemo sežu u stari Babilon i Egipat, ali je ona tada bila shvaćena uglavnom kao primijenjena disciplina. Kao deduktivna znanstvena disciplina matematika se razvija u staroj Grčkoj i to uglavnom kroz geometriju. Njihova znanja i znanja starih Indijaca preuzimaju Arapi te od 9. do 14. stoljeća za vrijeme procvata svoje kulture ta znanja šire na Zapad. Tada se Europa upoznaje sa naprednijom arapskom matematikom i postepeno prihvaća i arapske zapise brojeva. Tijekom stoljeća koja su uslijedila uglavnom su

se izučavali i prevodili stari spisi te u 16. stoljeću dolazi do procvata i nastaje moderna matematika (Glasnović Gracin, 2009).

Što se tiče matematike u Hrvatskoj ona se u školama nije pojavljivala kao zaseban predmet sve do druge polovice 18. stoljeća kada je uvedeno sekularno obrazovanje, dok se u 17. stoljeću poučavala samo u sklopu filozofskog tečaja. U pučkim osnovnim školama se nije učila kao matematika već kao računica odnosno aritmetika, a 1758. godine Mijo Š. Bolšić izdaje prvu knjigu iz matematike na hrvatskom jeziku pa se to razdoblje može gledati kao početak nastave matematike u Hrvatskoj.

Iako različita društva i kulture imaju drugačije poglede na obrazovanje i njihovi se kurikulumi razlikuju, matematika je uvijek bila isticana kao vrlo važan dio obrazovnog sustava te su se razvijale razne teorije i metode učenja matematike diljem svijeta (Lessani i sur., 2016). Ovdje će biti istaknute neke teorije učenja i poučavanja koje su zaživjele tj. imale svoj doprinos u razvoju suvremene nastave matematike.

Početak 19. stoljeća razvija se teorija koja ima postavke koje su duboko ukorijenjene u nastavu matematike, a njen je glavni predstavnik Edward Thorndike. On svoju **asocijacionističku/ konekcionističku** teoriju temelji na ideji da je učenje proces koji se razvija stvaranjem asocijacija/veza među pojavama, a te veze se učvršćuju stalnim ponavljanjima te one tako postaju navike (Cooper-Twamley i Wesley Null, 2009). Teorija potiče učenje uvježbavanjem postupaka tj. učenik uvježbavanjem uči pravila, algoritme i numeričke činjenice, a postupak se stavlja ispred razumijevanja (Vizek Vidović i sur., 2014).

Thorndike je razvijajući svoju teoriju ustanovio tri zakona učenja:

**Zakon spremnosti:** On ukazuje na to da se učenje odvija onda kada se pobudi želja za djelovanjem kroz neku pripremnu fazu jer ako netko nije spreman za učenje, znanje se ne može usaditi u njega. Također se navodi i sastavnica zadovoljstva, ako je netko spreman izvesti neku radnju, ima želju za tim nakon izvedbe slijedi zadovoljstvo koje učvršćuje veze.

**Zakon efekta/učinka:** Ovaj zakon govori kako ako nakon obavljene radnje slijedi zadovoljstvo onda će ta radnja biti ponovljena i ustaliti se kod neke osobe, ali ako ona ne dovede do zadovoljstva na kraju, onda se ona odbacuje odnosno dolazi do slabljenja ili prekida veza.

**Zakon ponavljanja/uvježbavanja:** zakon govori da kako bi se stvarale čvrste, stabilne veze radnje se moraju ponavljati/vježbati (Gandhi, 2010).

Sagledavajući postavke ove teorije i doba u kojoj je donesena može se zaključiti kako su one bile adekvatne za to doba jer je trgovina bila vrlo razvijena i znati dobro računati i biti vješt u tome je bilo jako važno. U to vrijeme nije bilo modernih pomagala kao danas te je zato proceduralno znanje bilo tako naglašeno.

Kasnije polovicom 20. stoljeća razvija se **teorija kognitivnog učenja** koja govori o tome da se učenje temelji na tome kako ljudi mentalno obrađuju podražaje na koje nailaze u okolini (Ormord, 1995, prema Lessani i sur., 2016). Sljedbenici ove teorije smatraju kako se kognitivni razvoj djece u školskoj matematici mora uvažavati te da djeca, ako su situacije koje se pojavljuju u zadacima povezane s njihovim životnim iskustvom, mogu vrlo uspješno rješavati i složene matematičke probleme (Vizek Vidović i sur., 2014). Ovo razdoblje donijelo je velike reforme nastave matematike koje su tražili sami matematičari jer su nastojali osvijestiti kako matematika nije samo račun već i puno više.

Nisu samo matematičari bili ti koji su potaknuli reforme u matematici isto su učinila i društvena zbivanja pa je tako tijekom šezdesetih godina 20. stoljeća u SAD-u, potaknuta političkim razmiricama i hladnim ratom između SAD-a i USSR-a, započela nova obrazovna reforma nastave matematike. Naime kada je krajem 50-ih godina Sovjetski Savez lansirao Sputnik u svemir i tako pretekao SAD u osvajanju prostranstava svemira ondje je to doživljeno kao poraz obrazovnog sustava što je dovelo do stvaranja radikalnog kurikuluma - „**New math**“ (Harris, 2018). Važnu ulogu u poticanju reforme i stvaranja novog školskog kurikuluma imala je i Evelyn Sharp koja je tvrdila kako se sadržaj u američkom kurikulumu nije mijenjao 300 godina te u svojoj knjizi iz 1964. godine „*A parent's guide to the New Math*“ daje upute roditeljima o novoj matematici koja se podučavala u školama.

U nižim razredima su se počeli podučavati pojmovi koji su prije bili rezervirani za više razrede kao što je teorija skupova i računanje u drugim bazama (Isbrecker, 2021). Općenito gledano došlo je do apstrakcije matematičkih koncepata i ona se podučavala prema modelu nastave gdje je matematika gledana kao deduktivna znanost.

Ovakav pristup je predstavljalo probleme učenicima koji nisu mogli razumjeti gradivo koje ih se podučava, ali i učiteljima posebice u nižoj osnovnoj školi koji nisu dobivali odgovarajuće znanje tj. nisu bili uvježbani za ovakav način rada te ih se vrlo rijetko konzultiralo tijekom

izrade kurikuluma. Najveću kritiku ovom obrazovnom sustavu 1973. godine daje Morris Kline u svojoj knjizi „*Why Johnny can't add: The failure of the new math*“ u kojoj tvrdi kako apstrakcija posljednja faza tijekom razvoja matematičkog mišljenja, a ne prva (Isbrucker, 2021).

Iako su ove promjene u obrazovnom sustavu nisu išle u pravom smjeru rezultirale su stvaranjem novih teorija učenja, a jedna od njih je i **konstruktivizam** koji je kao teorija učenja dao značajan doprinos poučavanju matematike, a razvio se iz ideja Piageta i Vygotskog. U njemu se socijalni činitelji ističu kao vrlo važni u učenju tj. učenje se odvija kroz socijalnu interakciju u kojima su učenici potaknuti radom drugih učenika, a učitelj je zadatak da stvori okruženje u kojem se kroz raspravu uči. Učitelj u tom procesu učeniku pomaže da na već postojeće znanje nadovezuje i novo stvarajući vlastite konstrukcije (Vizek Vidović i sur., 2014). Konstruktivisti vjeruju kako učenici nisu samo primatelji znanja nego oni sami kroz interakciju s drugim učenicima stvaraju/konstruiraju novo matematičko znanje (Lessani i sur., 2016). Nastavnik matematike podučavanjem novih koncepata potiče učenikov kognitivni razvoj, a taj razvoj se događa putem procesa *asimilacije* (osoba kada primi informacije transformira ih da bi ih uklopila u postojeće mišljenje) i *akomodacije* (transformacija vlastitog mišljenja pri primanju novih informacija) (Pleština, 2021). Piaget je odredio četiri faze razvoja kroz koje svako dijete prolazi te se one mogu primijeniti i na razvoj matematičkog mišljenja:

***Senzomotorička faza-*** (od rođenja do 2. godine) U ovoj fazi razvoja dijete je sposobno pronaći objekte koji su premješteni na drugo mjesto ili kada se nalaze van njegova vidokruga, a isto tako se smatra da mogu povezivati brojeve s količinom objekata (dvije lutke, tri autića isl.) (Ojose, 2008).

***Predoperacijska faza-*** (od 2. – 8. godine) Za ovu fazu je karakterističan razvoj govornih sposobnosti, egocentrična percepcija svijeta, razvijanje simboličnog razmišljanja te ograničena logika. U njoj je potrebno uključiti rješavanje problema, a dok djeca rješavaju probleme učitelj bi trebao učenike potaknuti na razgovor o njihovim postupcima što će mu omogućiti uvid u misaone procese djeteta (Ojose, 2008). U ovoj fazi su djeca u prvom i drugom razredu još uvijek konkretni mislioci i ne može im se samo dati primjer ili formula, ali ih treba učiti da istražuju i razvijaju strategije.

***Faza konkretnih operacija-*** (od 8. do 13. godine) Ovdje se događa veliki kognitivni razvoj djece, ubrzano se razvijaju jezične i opće sposobnosti te sada mogu razmatrati dvije ili tri

dimenzije simultano umjesto kao i do sada u fazama (Ojose, 2008). Ova faza počinje negdje u drugom razredu, učenici su iskusniji u razmišljanju te počinju mentalno vizualizirati konkretne i slikovne manipulacije te ih primjenjuju na apstraktne probleme (Burrnet, 2022).

**Faza formalnih operacija-** (>13. god., razmišljanje adolescenata i odraslih osoba) U ovoj fazi djeca postaju sposoban za formiranje vlastitih hipoteza i mogućih ishoda što omogućuje djetetu da formira svoju matematiku. Nadalje, razvijaju apstraktne misaone obrasce u kojima koristeći se simbolima izvode zaključke (Ojose, 2008).

U Nizozemskoj sedamdesetih godina prošlog stoljeća stvorena je teorija **realističkog matematičkog obrazovanja** koja promiče ideju da matematika treba biti povezana sa stvarnošću odnosno mora biti bliska dječjem iskustvu i relevantna društvu. Njen začetnik je Hans Freudenthal i temelji se na njegovom viđenju matematike. U svojoj teoriji naglašava kako matematiku treba gledati kao ljudsku aktivnost, a ne samo kao neki predmet koji će se tumačiti djeci. Lekcije na nastavi bi učenicima trebale dati priliku da stvaraju matematiku radeći ju i tako se stavlja fokus na aktivnosti učenika te tako dolazi do procesa matematizacije (Menon i Gyan, s.a.). Njegova ideja nije bila samo uključiti svakodnevnu realnost u nastavu matematike već da bogat kontekst stvarnosti služi kao izvor za učenje matematike (Treffers, 1993).

Kasnije Treffers u teoriju uvodi ideju o dvije vrste matematizacije: **Horizontalna matematizacija-** ovdje učenici koriste matematičke alate koji im mogu pomoći u organizaciji i rješavanju problema iz stvarnog svijeta, ona predstavlja prelazak iz stvarnog svijeta u svijet simbola

**Vertikalna matematizacija-** ona predstavlja proces reorganizacije u samom svijetu simbola kao što je otkrivanje veza između strategija i koncepata te pronalaženje prečaca i kasnija primjena tih otkrića. Ona predstavlja kretanje unutar svijeta simbola (Menon i Gyan, s.a.).

Kao nadogradnju na Freudenthalovu teoriju Van den Hauvel-Panhuizen i Treffers definiraju šest principa koji opisuju najbolji način učenja i poučavanja matematike koje teorija zastupa:

**Princip aktivnosti-** učenike se treba tretirati kao aktivne sudionike procesa učenja, matematika se najbolje uči radeći matematiku

**Princip realnosti-** odnosi se na učenikovu sposobnost primjene matematike pri rješavanju problema iz realne životne situacije te na to kako matematičko obrazovanje treba krenuti od problemskih situacija značajnih studentima

**Princip nivoa-** naglašava kako učenici prolaze kroz različite razine koje kreću od neformalnog konteksta, kroz stvaranja raznih razina shematizacija i prečaca pa do shvaćanja srodnosti između koncepata i strategija

**Princip međusobne povezanosti-** matematika se sastoji od različitih domena koje su međusobno isprepletene

**Princip interakcije-** učenici trebaju imati mogućnost da međusobno dijele strategije i tako ih unaprjeđuju

**Princip vođenja-** učitelj tijekom nastave matematike mora učenicima omogućiti njeno otkrivanje i kroz njega ih voditi (Van den Hauvel-Panhuizen i Drijvers, 2014).

Svako od ovih povijesnih razdoblja, zbivanja u njemu i dominantne teorije doprinijele su razvoju matematike kao nastavne discipline koja je danas.

### **3.) PROBLEMSKI ZADACI U TRADICIONALNOJ I SUVREMENOJ NASTAVI MATEMATIKE**

Nastavljajući se na povijesni pregled nastave matematike, ali s današnjeg aspekta možemo govoriti o *tradicionalnoj* i *suvremenoj* nastavi matematike.

#### **3.1.) Tradicionalna nastava matematike**

U prvobitnim društvima postojala je potreba uključivanje mladih što ranije u rad, a da bi se to moglo izvršiti potrebno je bilo osposobiti ih za njega. To osposobljavanje se vršilo tako da su stariji, mudriji članovi zajednice prenosili svoja iskustva na mlade. Unutar iskustva koje se prenosilo nalazila su se i matematička znanja kao važan dio pripreme mladih za životi i ostvarivanja društvenih interesa. Iako je taj prijenos matematičkog iskustva bio nesustavan proces i vrlo neorganiziran imao je važnost za prijenos matematičkog znanja sve do osnivanja prvih škola 3000 godina pr. Kr. (Kadum, 2005).

Tradicionalno se nastava matematike odvijala tako da bi se od nastavnika očekivalo da postavi određene ciljeve nekog sata i odredi što će na određenom satu raditi dok bi učenici trebali pažljivo slušati i pratiti učitelja, prepisivati što piše na ploči, pokušati razumjeti sve to i naučiti (Matijević, 2011). Sadržaji nastave matematike u tradicionalnoj školi bio je rascjepkan u tematske cjeline, a veze među cjelinama nisu bile uočene niti naglašene. Učenici bi savladavali matematičke lekcije jednu po jednu, zatim uvježbavali kroz brojne lekciji pripadajuće zadatke i nakon toga se prelazilo na novu lekciju, a kada bi se nagomilala dovoljna količina gradiva prethodni sadržaji bi se zaboravljali (Mišurac, 2014).

Van de Wale i sur. (2010) ističu neke karakteristike udžbenika tradicionalne nastave matematike koji su imali negativan utjecaj na razumijevanje i učenje matematike kod djece. Naime zbog velike količine gradiva koje se pokrivalo u udžbenicima odnosno velike količine tema koje treba obraditi često se događalo da se i zahtjevnije teme obrađuju u samo jednom nastavnom satu što bi dovodilo do neadekvatnog razvijanja dubokog razumijevanja gradiva. Ovakvi udžbenici su podržavali oblik nastave u kojem nastavnik samo demonstrira i objašnjava kako se radi neki postupak, a učenici nakon toga taj postupak uvježbavaju iz čega se može izvući vrlo važan problem tradicionalne nastave, a to je da se davao prevelik naglasak matematičkim postupcima nauštrb konceptualnom razumijevanju.



Zbog ovakve nastave u kojoj je učenik lišen vlastite inovativnosti, samostalnosti i bez mogućnosti da razvija kreativnost i stvaralaštvo, nastave u kojoj je on samo pasivni subjekt je bilo važno da dođe do promjene u odgojno-obrazovnom sustavu (Kadum, 2005).

Odlika čiste tradicionalne nastave je da nastavnik učenicima bez objašnjenja servira postupak rješavanja nekog tipa zadatka, učenici na temelju par primjera koje riješi nastavnik taj postupak primjenjuju i na kraju ga uvježbavaju dok ne bude točan. U ovom načinu poučavanja se ogleda sama asocijacionistička teorija Edwarda Thorndikea jer se neprestanim ponavljanjem i uvježbavanjem bez logičkog zaključivanja i razmišljanja učenike poučava šturom učenju postupaka rješavanja zadataka napamet. Stoga se treba zapitati o položaju problemskog zadataka u tradicionalnoj nastavi matematike i je li on bio u pravom smislu problemski zadatak. Ako se uzme Schoenfeldova definicija koja kaže da je problemski zadatak onaj zadatak za koji učenik nema unaprijed propisano ili zapamćeno pravilo/metodu rješavanja te nema percepciju da postoji specifična pravilna metoda rješavanja zadatka (prema Van de Wale i sur. 2010) onda se ti zadaci rješavani u tradicionalnoj nastavi ne mogu smatrati problemskima u pravom smislu.

### **3.2.) Suvremena nastava matematike**

Uvažavajući nužnost da školski planovi i programi budu u skladu sa suvremenim principima znanosti i potrebama društva vrlo je važno da se pri reformi školstva oni zastarjeli planovi zamjene naprednijim i prikladnijim suvremenim potrebama (Rajčić, 1960). Kako je matematizacija rada u 21. stoljeću vrlo ubrzana u gotovo pa svim poslovnim područjima od učenika se očekuje opširno i raznoliko poznavanje matematičkih sadržaja (Kuzle, 2016).

Činjenica da je matematika vrlo važan čimbenik tehnološkog napretka i bitan element za poboljšanje kvalitete življenja ukazuje na to kako je od velike važnosti njeno podučavanje u školama (MZO – Škola za život, 2019). Sada se pred pedagošku teoriju i praksu počinju postavljati sve veći zahtjevi kako bi se pronašli načini i putevi da se suvremena nastava modernizira i unaprijedi što uvjetuje pronalaženja onih nastavnih modela koji bi dali bolje rezultate (Janković, 2016).

U sam centar pozornosti sada, suvremena nastava matematike, stavlja razvoj učenikovih matematičkih vještina, znanja i sposobnosti koje će koristiti učeniku u njegovom društvenom, profesionalnom ali i osobnom životu (Baranović, 2021). Klasična tipologija nastavnog sata sada se napušta što daje više slobode učiteljima i učenicima ali se ne stvara konfuzija te tako reforma vrši korjenite izmjene vrlo važne za napredak (Obradović, 1998). Učenike se potiče da ne

preuzimaju gotova znanja iz okoline već da ih sami stvaraju. Svojim aktivnim radom usvajaju novu građu, samostalno uočavaju odnose i veze odnosno vlastitim radom i angažiranjem stječu razna znanja i sposobnosti (Mišurac Zorica i Plazibat, 2005).

Ovakav oblik učenja je od velike važnosti jer kako ističe Bruner (1976) cilj je svakog učenja je da naučeno gradivo posluži, bude od koristi u budućnosti. Ranije učenje nekog gradiva može doprinijeti efikasnosti kasnije jer na temelju početno naučene neke opće ideje učenik kasnije problem može sagledati kao neku posebnu varijaciju početne ideje i tako ga lakše riješiti (prema Ovčar, 1990).

Tako se sada pred suvremenu matematiku postavljaju dva problema čija rješenja zahtijevaju pronalazak: \* razvoj učenikova stvaralačkog mišljenja te njegovih stvaralačkih sposobnosti

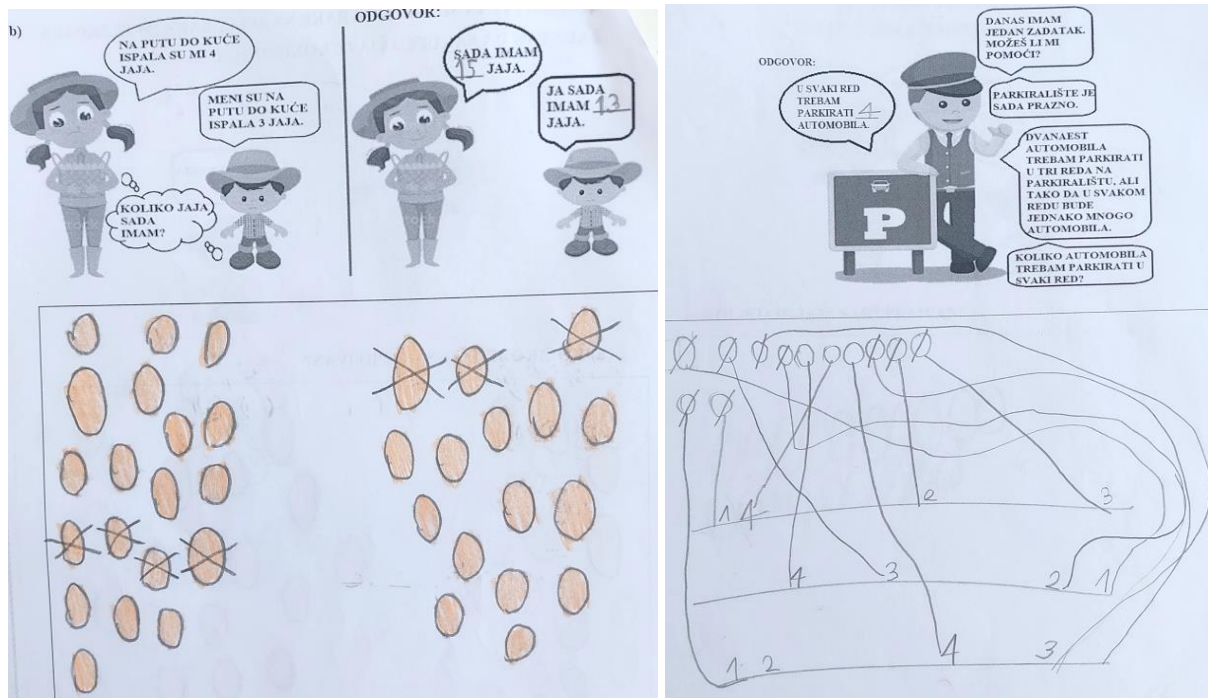
\* adekvatno osposobljavanje učitelja, nastavnika matematike

Suvremena metodika matematike pruža mogućnosti za rješavanje navedenih problema osobito prvog tako da se učenike uvodi u istraživački i samostalan rad te im se razvijaju sposobnosti za rješavanje različitih problema. Sve to se može ostvariti samo uz dobrog i kreativnog učitelja, nastavnika matematike jer bez kreativnog učitelja nema ni zanimljive, kreativne matematike čime se ističe važnost i potreba pronalaska, unaprjeđenja odgovarajućeg sustava osposobljavanja (Kurnik, 2009).

U suvremenoj nastavi kreće se od problemskog zadatka koji dijete rješava i iznalazi rješenje zadatka matematičkim modeliranjem ili modeliranjem s konkretima iz kojih može zapisati neki račun. Odnosno kao što je već navedeno učenike se kroz ovu vrstu zadataka nastoji potaknuti da razmišljaju, koriste se logikom, modeliraju, stvaraju strategije i slično. Na ovaj način ih se priprema da u budućim situacijama budu spremni na djelovanje i pronadu rješenje problema koristeći se vlastitim idejama i kreativnošću, a ne da suhoparno nauče određen postupak napamet pa ga kasnije ne znaju primijeniti ili zaborave. Slijedom toga ovdje su prikazana dva učenička rada koji prikazuju kako učenici iako se neki aspekti zadatka nalaze van onoga što su oni radili opet iznašaju valjano rješenje čisto logički razmišljajući i stvarajući strategiju.

Na prvoj slici vidljivo je kako dijete iako ima problema s oduzimanjem brojeva pronalazi način kako doći do točnog rješenje pa tako crta posebno svako skupljeno jaje i precrtava ona razbijena te tako dolazi do točnog rezultata. Druga slika prikazuje još složeniji proces razmišljanja u kojem učenik prvog razreda ne poznajući koncept dijeljenja ipak pronalazi strategiju kako doći do rješenja tako da crta 12 automobila i jednog po jednog svrstava u različite redove dok ne

dobije kako u svaki red stanu četiri automobila. Ovi prikazi dokazuju kako djeca ne trebaju zacrtane pravila, sheme i suhoparno ponavljanje jedno te istih principa već da im treba dati i slobode u stvaranju vlastitih strategija za rješavanje zadataka.



**Slika 1:** Primjer rješavanja prvog zadatka 1.r. **Slika 2:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 1.r.

Valja zaključiti kako tradicionalni način priprema djecu za reprodukciju i ponavljanje dok ih suvremena nastava potiče na istraživanje i otkrivanje. No treba istaknuti kako niti jedan nastavni proces niti jednog nastavnika nije isključivo tradicionalan ili suvremen već se radi uvijek o kombinaciji jednog i drugog. Ponekada nastavnici nisu spremni za jedan veliki iskorak prema čisto suvremenoj nastavi zato što ona uključuje veliki angažman i rad učenika odnosno samostalno istraživački rad u čemu učitelji možda osjećaju nesigurnost jer to nije bio model kakvim su oni poučavani te nisu sigurni u ishod i boje se eksperimentirat. Tradicionalni način priprema za rekapitulaciju i ponavljanje dok suvremena nastava potiče dijete na istraživanje i otkrivanje. No ne možemo inicirati da je sva tradicionalna nastava bila loša jer je nastojala ispuniti potrebe svoga vremena, a isto tako i da je sva suvremena nastava dobra. Postoje kompromisi koje svaki nastavnik mora učiniti kako bi nastava bila dobra i učinkovita ovisno o djeci koja se nalaze u razredu i njihovim mogućnostima.

#### 4.) CILJEVI SUVREMENE NASTAVE MATEMATIKE

Uzimajući u obzir dosad navedeno može se reći kako je matematika u osnovnoj školi predmet s vrlo dugotrajnom tradicijom te jedan od temeljnih predmeta zbog svoje vrijednosti odnosno znanja koje daje učenicima za budućnost. U nastavi matematike se ne uči mnogo činjenica koje bi trebalo pamtiti već se težište rada stavlja na uvježbavanje postupaka i razumijevanje pojmova (MZOS, 2006), a kvalitetno se učenje i poučavanje matematike gleda kao jedan od temeljnih elemenata uspješnosti odgojno-obrazovnog sustava (MZO, 2017). Navedeno potvrđuje činjenica da se matematički sadržaji prožimaju kroz cijeli obrazovni sustav od predškolskih ustanova pa do visokog školstva, a u osnovnoj školi se izučava kroz sve razrede i zauzima oko 18% vremena u nastavi (Ovčar, 1990).

Kako bi se ostvarilo učenje i poučavanje u nastavi matematike treba doći do povezivanja matematičkih domena i procesa (MZO – Škola za život, 2019) to jest uravnoteženim preplitanjem ovih dimenzija doprinosi se osnaživanju i osposobljavanju učenika za logičko, strateško, kritičko, kreativno i inventivno mišljenje.

Nastavni sat osnovni je oblik organizacije rada u školi te se tako i ciljevi same nastave matematike ostvaruju uglavnom na nastavnom satu. Za jedan sat matematike važna je dobra organizacija i priprema sata, kvalitetno izvođenje te na kraju ocjena uspješnosti nastavnog sata koji je održan. Nastavni satovi obično se dijele prema cilju koji se na određenom satu treba postići, među sljedećim tipovima sata samo prvi ima precizno podijeljene etape dok se ostali izvode slobodnije i više ovise o kreativnosti i umješnosti nastavnika matematike.

##### **Sat usvajanja i obrade novog gradiva**

Ovaj oblik nastavnog sata ima četiri dijela: **Ponavljanje i uvod:** učenicima se nastoji aktivirati mišljenje i psihološki ih se pripremiti za radi (provjera domaće zadaće, ponavljanje obrađenog gradiva, postavljanje cilja sata i motiviranje učenika)

**Obrada novog gradiva:** daje se pregled nastavne jedinice, ističu se glavne ideje te problemi i ukazuje se na povezanost s prethodnim gradivom

**Utvrđivanje novog gradiva:** ustanovljuje se stupanj usvojenosti gradiva koje je obrađeno na satu i uspješnost nastave (ostvaruje se rješavanjem prikladnih zadataka)

**Zadavanje domaće zadaće:** učenike se upoznaje sa zadacima za domaću zadaću i provjerava se razumiju li ih

## **Sat vježbanja i ponavljanja**

Služe za utvrđivanje naučenog gradiva, a njihovi elementi jesu provjeravanje zadataka koju su učenici imali za domaći rad i vježbanje novih. Kod ovih satova najvažnija značajka je pojačan samostalan učenički rad.

## **Provjeravanje znanja, navika i umijeća učenika**

Ovi satovi se provode usmenim ili pismenim ispitivanjem učenika. Ove provjere se mogu provoditi i na svakom nastavnom satu, ali ponekad postoji potreba za nastavnim satima na kojima će ta provjera biti dublja primjerenija.

## **Sat sistematizacije naučenog gradiva**

Kada se obradi veća smisljena cjelina gradiva poželjno je ustanoviti stupanj njegove usvojenosti, tako nastavnik dobiva informacija o uspješnosti i kvaliteti svog poučavanja (Kurnik, 2007).

Nastavni predmet matematika nije isto što i matematička znanost, ali je ona njena didaktička projekcija te se ostvaruje kroz ciljeve i zadatke nastave matematike koji se trebaju harmonijski dopunjavati odnosno isprepletati (Obradović, 1998).

**Cilj** nastave matematike jest da se učenike pripremi da se u svijetu rada i svakodnevnom životu mogu uspješno snalaziti te da ih se nauči da u različitim situacijama mogu misliti stvaralački i logičko-matematički (Dakić, 2011 i Prvanović, 1981, prema Kadum i Kadum, 2019). Kurnik (2004) navodi da je glavni cilj nastave matematike da se učenicima prenese određen sustav umijeća, znanja i navika.

**Zadace** matematike u razrednoj nastavi koje navodi Markovac (2001) su: • usvajanje sadržaja kao što su prirodni brojevi, upoznavanje odnosa među njima te operacija koje se mogu među njima vršiti te se počinju formirati osnovni geometrijski pojmovi

- kod učenika se trebaju razvijati različite intelektualne sposobnosti kao što su: pamćenje, mišljenje, promatranje i sl.
- formiranje pozitivnih svojstava ličnosti kod učenika kao što su urednost, točnost, upornosti pri rješavanju zadataka...

Zaključiti treba da bi nastava matematike bila kvalitetna, razredno ozračje u kojem se izvodi treba biti opušteno i poticajno te sama nastava zabavna, zanimljiva i povezana sa svakodnevnim prilikama (Horvat, 2018).

#### 4.1.) Reformatorski procesi i nastava matematike u Republici Hrvatskoj

U Republici Hrvatskoj obrazovna politika nastojala je ukomponirati sva tradicionalna, povijesna iskustva i nasljeđa u nastavu matematike te donijeti zakonske dokumente koji su u skladu sa suvremenim potrebama. Počinju se naglašavati različite kompetencije i vještine učenika, smanjuje se naglasak s proceduralnog znanja i odmiče se od sadržaja tj. nastoji se ne sagledavati samo sadržaj već uvažiti i kompetencije iz matematičkih procesa. U skladu s time pokrenuto je nekoliko reformi u Republici Hrvatskoj vezano za promjenu pristupa nastavi, a između ostalog i nastavi matematike.

Prva takva reforma bila je 2006. godine kada se donosi *Nastavni plan i program za osnovnu školu* koji nije u dovoljnoj mjeri stavio naglasak na ishode učenja, ali ih je naveo u formi obrazovnih postignuća. Kao glavna značajka promjene navodi se izostavljanje sadržaja koji nije u skladu s dobi i mogućnostima učenika i dodavanje potrebnog sadržaja što i dalje ukazuje na usmjerenost prema samom sadržaju. Dobra strana ove reforme jest što su se u plan i program uvela obrazovna postignuća to jest za svaku nastavnu temu se navode ključne riječi i postignuća koja učenik treba ostvariti učenjem pojedine teme.

Na tragu ove reforme donesen je *Nacionalni okvirni kurikulum* 2011. godine koji je za matematiku bio jako dobar jer je uveo kompetencije u obrazovni sustav. U njemu su sve kompetencije koje dijete treba razviti kroz nastavu matematike podijeljene u dvije jednakopravne skupine: *matematički procesi* i *matematičke domene*.

- **matematički procesi** (logičko mišljenje, prikazivanje i komunikacija, argumentiranje i zaključivanje, povezivanje, primjena tehnologije te matematičko modeliranje i rješavanje problema)
- **matematičke domene** (oblik i prostor, podaci, mjerenje, statistika i vjerojatnost, algebra i funkcije te brojevi)

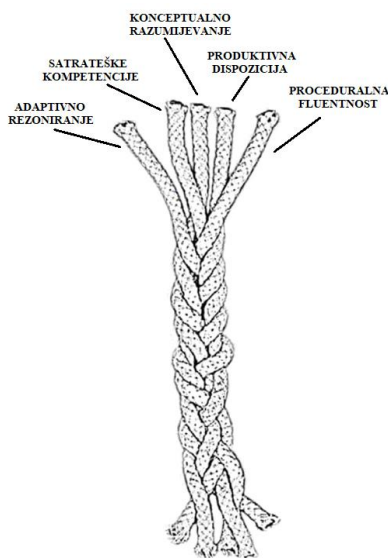
Upravo se u matematičkim procesima stavlja naglasak na logično zaključivanje, povezivanje, zaključivanje, modeliranje odnosno sve one kompetencije koje se trebaju provlačiti kroz sve sadržaje - matematičke domene. Tada se prvi puta ističe ono ključno u matematičkom logičko zaključivanje. Ovdje se više nigdje ne spominju sadržaji i teme koje se obrađuju već se kroz cikluse (niži i viši razredi OŠ, srednje škole) opisuju ishodi učenja iz svakog pojedinog matematičkog procesa i domene što je pozitivan odmak od tradicionalnog sustava.

Godine 2019. Ministarstvo znanosti i obrazovanja kroz projekt-*Škola za život* donosi dio Nacionalnog kurikulumu koji je nazivaju *predmetni kurikulumi* za svaki pojedini nastavni predmet pa tako i za matematiku. Ovaj kurikulum prihvaća ideje *Nacionalnog okvirnog kurikulumu* iz 2011. godine te naglašava matematičke procese i domene, ono što ih razlikuje jest da ovaj kurikulum razrađuje ishode po razredima pritom se za svaku pojedinu domenu iznose njezini odgojno-obrazovni ishodi i njihova razrada te se daju preporuke za njihovo ostvarivanje.

Razmišljajući u kontekstu cilja matematike mnogi su znanstvenici o tome pričali i pisali pa u skladu svega onog što je rečeno o tradicionalnoj i suvremenoj nastavi te o proceduralnim znanjima koji su bili naglašeni u neko doba biti će istaknuta znanja prema Kilpatricku koji je vrlo simbolički i jasno iznio što je to važno znati učenicima u nastavi matematike.

#### 4.2.) Matematičko umijeće

U radu s učenicima, nastavnici matematike, svakodnevno dolaze u različite situacije u kojima učenici pokazuju svoje manjkavo, osrednje ili odlično znanje matematičkih sadržaja. Tako raznovrsni stupnjevi znanja proizlaze iz činjenice što pojedini učenici nisu uspješno usvojili sve kategorije matematičkog znanja (Dijanić, 2017). Prema Kilpatricku i sur. (2001) matematičko znanje odnosno umijeće se sastoji od pet komponenti, niti koje nisu zasebne i neovisne komponente već čine različite aspekte jedne kompleksne cjeline: *konceptualno razumijevanje, proceduralna fluentnost, strateške kompetencije, adaptivno rezoniranje i produktivna dispozicija*



**Slika 3:** Matematičko umijeće

## **Konceptualno razumijevanje**

Konceptualno znanje predstavlja znanje koje je bogato u vezama i odnosima, može ga se gledati kao povezanu mrežu znanja koja spaja odvojene dijelove nekih informacija. Veze prožimaju sve pojedinačne činjenice i tvrdnje pa je tako svaka od njih povezana s nekom mrežom (Hiebert i sur. 1986). Sam pojam koncepta označuje karakteristike koje određuju pripada li ili ne pripada određeni element nekom skupu ili klasi, a fokus se stavlja na kategorizaciju i klasifikaciju (Chinn, 2012 prema Hurrel, 2021). Kao jedan od elemenata koji grade učinkovito matematičko znanje doprinosi učenju kroz razumijevanje što čini učenje jednostavnijim i smislenijim pa tako učenici koji imaju razvijeno konceptualno znanje lakše se prisjećaju i povezuju novo znanje sa starim (Martin, W. G. i sur., 2000). Vrlo važan indikator konceptualnog razumijevanja je učenikova sposobnost da predstavi neku matematičku situaciju u drugačijem obliku i da zna kako taj drugačiji prikaz može biti koristan u različite svrhe (Kilpatrick i sur., 2001).

## **Proceduralna fluentnost**

Proceduralna fluentnost je znanje o procedurama odnosno znanje kada se i kako ispravno njima služiti te vještina njihovog izvođenja efikasno, točno i fleksibilno. Posebno je važna u domeni brojeva jer podržava konceptualno razumijevanje mjesnih vrijednosti i značenje racionalnih brojeva (Kilpatrick i sur., 2001). Hiebert i sur. (1986) ga dijele u dva dijela: *prvi dio* je poznavanje pojedinačnih simbola matematičkog sustava i njegovog formalnog jezika, a *drugi dio* je skup postupaka i pravila za rješavanje matematičkih problema. Izgrađeno je na bazi konceptualnog razumijevanja, a u školama se prilikom učenja matematike glavni naglasak stavlja na proceduralno znanje (Nahdi i Jatisunda, 2020).

## **Strateške kompetencije**

Kilpatrick i sur. (2001) na stratešku kompetenciju gledaju kao na sposobnost formuliranja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema. Učenici koji je posjeduju, imaju različite strategije rješavanja problema te znaju raspoznati koja je strategija najpogodnija za rješavanje specifičnog problema. Neke od strategija za rješavanje problema su: nagađanje-provjera-ispravak-izmjena, crtanje rješenja, preformulacija problema, sustavno eksperimentiranje i sl. (Novotná, 2014 prema Guzman Gurat, 2018).

## **Adaptivno rezoniranje**

Ova komponenta matematičkog znanja odnosi se na kapacitet neke osobe da razmišlja logički o vezama između situacija i koncepata, ono predstavlja ljepilo koje sve povezuje odnosno nit



vodilju koja vodi prema učenju (Kilpatrick i sur., 2001). Dakle ona od učenika zahtjeva da nagađaju, daju dokaze ili razloge za istinitost tvrdnje te da donose zaključke (Darwani i sur., 2020). Kada se u matematici govori o odmaku od konkretnog, odnosima i uopćavanju onda je tu riječ o algebri odnosno algebarskom mišljenju. Algebarsko mišljenje predstavlja proces u kojem učenici generaliziraju svoje matematičke postupke i ideje na temelju skupa posebnih pojmova, a generalizacija se uspostavlja kroz diskusiju i argumentaciju (Kaput, 1995 prema Blanton i Kaput, 2005).

### **Produktivna dispozicija**

Produktivna dispozicija predstavlja tendenciju da se vidi smisao u matematici i da ju se spoznaje kao korisnu i vrijednu disciplinu. Razvija se zajedno s drugim nitima matematičkog umijeća i istodobno im pomaže da se razviju. Ona je vjerovanje da se stalni napor u učenju na kraju ipak isplati (Kilpatrick i sur., 2001).

Tomislav Grgin (2004) u Hrvatskoj, proučavajući različite varijante znanja kod učenika ustanovio je četiri kategorije učeničkih znanja: *fotografsko*- elementarno znanje nekog područja i čini temelj ostalim složenijim kategorijama znanja. Očituje se znanjem specifičnih činjenica, nazivlja i bitnih karakteristika pojmova.

*interpolacijsko*- kada se među činjenicama počinju uočavati sličnosti i razlike te uzročno-posljedične veze.

*operacijsko*- do njega se dolazi kombiniranjem i odabirom najprikladnijih metoda i modela te se iskazuje donošenjem pravila, postupaka, ideja i zakona te njihovom primjenom u različitim situacijama

*ekstrapolacijsko*- ovo je najviša razina znanja i očituje se u rješavanju problema jer korištenjem vrlo složenih intelektualnih funkcija poprimaju se obilježja stvaralačkog djelovanja (prema Dijanić i sur. 2017).

Stoga u razredu nastavnik matematike ima vrlo kompleksnu zadaću. Da bi svoju nastavnu djelatnost uspješno izvršio mora brinuti o svim učenicima te o znanju koje treba prenijeti svakom pojedinom od njih. Postoje znanja matematike koja su nužna za svakog pojedinog učenika, zatim ona koja su potrebna cijelom razredu, ali nisu nužna za cijeli razred te naposljetku dodatna znanja koja će pojedini učenici steći najčešće sami (Kurnik, 2004).

## 5.) MATEMATIČKI ZADATAK

Za razliku od tradicionalne nastave matematike, suvremena nastava težište postavlja na učenikovo razvijanje umijeća stvaralačkog i samostalnog proučavanja matematike te se nastoje stvoriti preduvjeti da se stečena znanja i umijeća uspješno mogu primijeniti u budućnosti. Ovakav oblik nastave matematike u velikoj mjeri se ostvaruje primjerenim izborom te korištenjem matematičkih zadataka (Kurnik, 2000). Stoga, matematički zadaci predstavljaju sredstvo vrlo važno pri oblikovanju osnovnog matematičkog sustava znanja, navika i umijeća te istodobno doprinose razvoju učenikovog kreativnog mišljenja i matematičkih sposobnosti.

S perspektive suvremene nastave i matematički zadatak se može sagledati različito. Nekada u tradicionalnoj nastavi matematički zadatak je bio računski no danas matematički zadatak može biti različit, naravno može biti i računski, ali i zadatak s riječima, zadaci otvorenog tipa i mnogi drugi. Upravo ova orijentacija prema različitosti zadataka čini bogatstvo suvremene nastave matematike i doprinosi njenoj dinamici, a što je najvažnije promišljanju i dječjem istraživanju matematike.

Nastava matematike tako postaje kvalitetnija i postižu se bolji rezultati primjerenim izborom i korištenjem različitih matematičkih zadataka (Jurić i sur. 2019). Matematički zadaci predstavljaju osnovno sredstvo, materijal uz pomoć kojeg učenici usvajaju propisano nastavno gradivo odnosno grade svoje znanje matematike. Svaki zadatak s kojim se susreće učenik na nastavi sadrži neku nepoznicu, nešto što učenik prije nije znao i nastoji doznati njegovim rješavanjem. Stoga se može reći da je zadatak *neki nalog, poticaj, zahtjev da se iz podataka i uvjeta koje poznajemo pronađu nepoznati brojevi, podaci, veličine* (Markovac, 2001).

Priroda matematičkih zadataka može utjecati i oblikovat način na koji učenici razmišljaju te može poslužiti proširivanju ili ograničavanju učenikova pogleda na temu koja je obrađena. Razlog tome je što učenici razvijaju smisao o tome što znači „raditi matematiku“ iz iskustva kojeg stječu na nastavi matematike radeći zadatke (Schoenfeld, 1992 prema Henningsen i Stain, 1997). Obradović (1998) prema Polyi iznosi opće faze rješavanja matematičkih zadataka:

***upoznavane /razumijevanje zadatka-*** upoznaje se sadržaj zadatka te se promatraju pojedini elementi zadatka

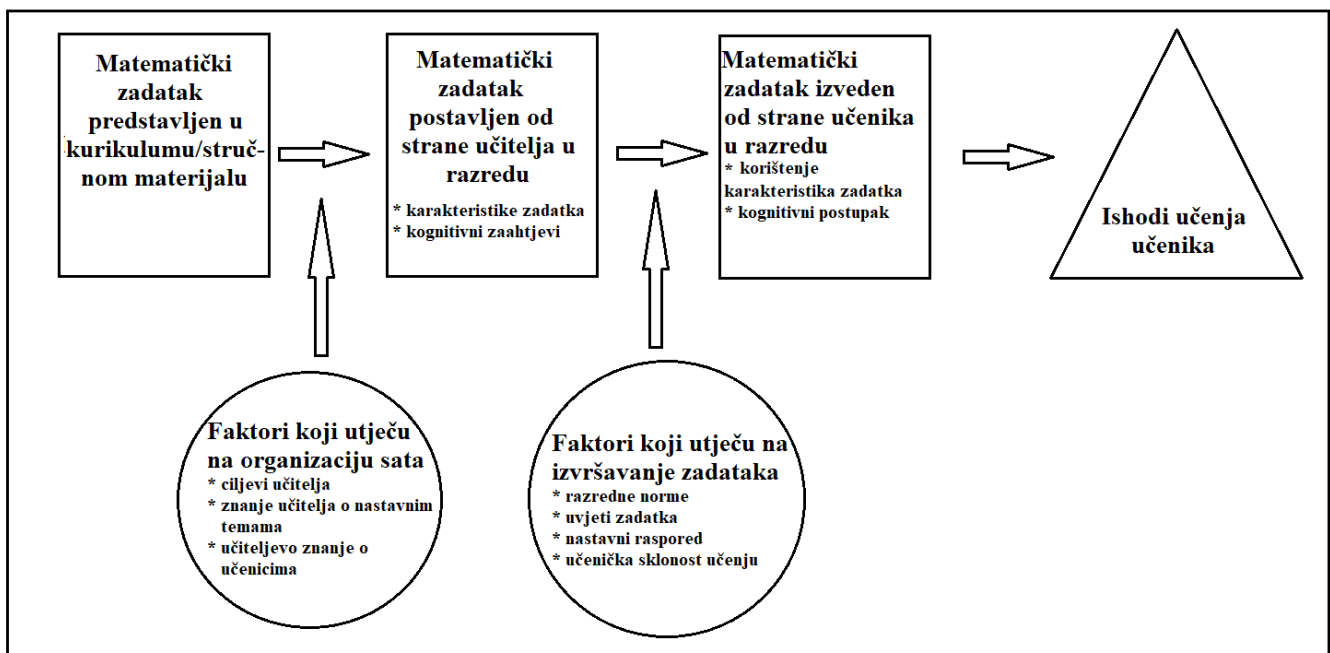
***sređivanje podataka-*** sređuju se zadane veličine te se ističe ona koju treba odrediti

***plan rješavanja-*** određuju se formule i veze između veličina

**izvršavanje plana-** glavina posla odlazi na računanje, u formule se uvrštavaju poznate veličine te se izračunavaju nepoznanice

**osvrt i provjera rezultata-** nakon dobivanja rezultata povezuje ga se s zadanim elementima i provjerava njegova točnost.

Matematički zadaci kroz svoj ciklus prolaze tri faze. Prvotno ih predstavljaju autori kurikuluma i udžbenika zatim s obzirom na njegovo znanje i ciljeve rada učitelj postavlja učeniku, a učenik ih na kraju rješava kako bi se njegovo znanje produbilo i učvrstilo.



**Slika 4:** Faze razvoja matematičkog zadatka

Autori sheme navode i dvije dimenzije matematičkog zadatka: **karakteristike zadatka-** aspekti zadatka koje je učitelj/nastavnik matematike odredio kao značajne za razvoj matematičkog razumijevanja, smisla i rasuđivanja **kognitivni zahtjevi-** način razmišljanja uključenog pri rješavanju zadatka, bilo najavljenog od učitelja ili učenikov vlastiti proces mišljenja i ideja (Henningsen i Stain, 1997).

Može se reći da zadatci, u nastavi matematike, imaju centralnu ulogu. Oni su inicijatori aktivnosti jer pred učenika stavljaju različite mogućnosti. Svojom prirodom mogu utjecati na način kojim će učenici razvijati svoju kreativnost i mišljenje stoga je važno da samo jedna vrsta zadataka ne dominira kako ne bih došlo do ograničenog shvaćanja matematike kod učenika (Glasnović Gracin, 2015). Kontinuirani proces, koji podrazumijeva nastavu matematike, odnosi se na rješavanje različitih vrsta zadataka koji sadržavaju poznate i nepoznate elemente koje učenik tek njihovim rješavanjem treba otkriti i objasniti (Kos i Glasnović Gracin, 2012).

## 5.1.) Vrste matematičkog zadatka

Sastav matematičkog zadatka kao složenog objekta nije jednostavno analizirati, ali se u širem smislu prirodno izdvaja pet osnovnih sastavnica: **uvjeti**- oni su sastavni dijelovi svakog matematičkog zadatka i u užem smislu se odnose na dane/poznate veličine, nepoznate veličine koje se traže te uvjete i objekte koji opisuju veze među između objekata i veličina

**cilj**- u jednoj vrsti zadataka se pronalaze rezultati, a u drugoj opravdavaju tvrdnje i izvode zaključci

**teorijska osnova**- kako bi se pronašlo rješenje nekog zadatka potrebno je imati određeno znanje. Tako se ova sastavnica odnosi na teorijske činjenice koje su u uskoj vezi s ciljevima zadatka i njegovim uvjetima te se otkrivaju analizom i stvaraju put kojim će se zadatak riješiti

**rješavanje**- ono se provodi nakon detaljne analize u kojoj se otkrio put rješavanja i predstavlja prijelaz od postavljenih uvjeta do rješenja odnosno rezultata

**osvrt**- pogled unatrag i provjera rezultata dobivenog rješavanjem čini vrlo važan element jer se raznim pitanjima dovodi do ispitivanja nekih novih ideja za rješavanje (Kurnik, 2010).

Podjela matematičkih zadataka ima razno raznih, mnogi ljudi su se nastojali orijentirati prema užoj podjeli no možemo ih dijeliti prema sadržaju, prema tome radi li se o računskim ili zadacima riječima, no oni mogu biti prikazani i slikom kao što su geometrijski zadaci vrlo često. Oblik i izgled zadatka ne moraju nužno donositi podjelu kvalitete zadatka u smislu da traži uvježbavanje ili zahtjeva neko razmišljanje i istraživanje nad zadatkom.

Ovdje će se navesti neke glavne podjele matematičkih zadataka i to prema: *cilju zadataka, njihovoj svrsi, tipu, mjestu i ulozi u nastavnom procesu te složenosti i težini.*

Prema **cilju** koji zadaci imaju određuju se dvije vrste zadataka: **Odredbeni zadaci**- cilj ovih zadataka je pronalaženje objekata, nepoznanica koje zadovoljavaju uvjete zadane u zadatku. Ovisno o području matematike nepoznanice mogu biti različite tako je u nepoznanica u algebarskim zadacima nekakav broj, u geometriji je to lik i sl. Glavni dijelovi ovog tipa zadataka su zadani podaci, uvjeti i nepoznanica.

**Dokazni zadaci**- njihov cilj jest da se nekoj postavljenoj tvrdnji odredi istinitost, a glavni dijelovi su im pretpostavka i tvrdnja. Da bi se zaključak dokazao treba se pronaći element koji povezuje uvjet i zaključak, a da bi ga se opovrgnulo dokazuje se kako iz pretpostavke ne slijedi dobivena tvrdnja (Polya, 2003).

Prema **svrsi** kojoj su određeni zadaci namijenjeni dijelimo ih na: **Numerički/zadaci s brojevima**- u ovim zadacima brojevi su povezani relacijama i znakovima za računske operacije ( $8+3=$ ,  $9<12$ ,  $16\cdot 4\dots$ ), a svrha im je razvijanje prikladne računske tehnike.

**Tekstualni/zadaci riječima**- zadaci u kojima se riječima formuliraju odnosi i podaci koje se treba oblikovati računski, a zatim doznati rješenje odgovarajućom računskom operacijom (Umanji umnožak brojeva 6 i 9 za 12). Njihovom se rješavanjem učenike osposobljava da znaju matematičko znanje primijeniti u realnom svijetu.

**Zadaci s veličinama**- kod ovih zadataka uz znakove za relacije i operacije te brojeve se navode još i oznake za veličine (površina, dužina, masa, volumen i vrijeme) te oni osposobljavaju učenike za primjenu računskih tehnika tijekom rada s veličinama ( $7\text{km} + 4\text{dm} + 8\text{m}$ )

**Geometrijski zadaci**- uključuju crtanje geometrijskih tijela i likova, zbrajanje, oduzimanje i prenošenje dužina, mjerenje površine i dužine isl. Ovi zadaci imaju dvojaku svrhu: prva je da osposobljavaju učenike za korištenje geometrijskog pribora, a druga je da uz pomoć njih usvajaju geometrijske činjenice kao što su opseg kvadrata i pravokutnika, površina trokuta i dr (Markovac, 2001).

Prema **tipu** zadatke dijelimo na: **Zadatke zatvorenog tipa**: u kojima su postupci rješavanja unaprijed poznati i imaju samo jedno valjano rješenje

**Zadatke otvorenog tipa**: zadaci u kojima ima više rješenja i načina rješavanja te za koje unaprijed nije poznat postupak rješavanja. Tijekom njihova rješavanja naglasak se stavlja na raspravu i proces rješavanja problema, a ne na sami rezultat (Majdiš, 2019).

Prema **mjestu i ulozi u nastavnom procesu** zadatke se dijele na: *uvodne, zadatke za uvježbavanje i ponavljanje, za domaću zadaću, dodatne zadatke te dopunske, zabavne i problemske zadatke* (Kurnik, 2000).

Prema **težini i složenosti** matematičke zadatke dijelimo na: **Standardne zadatke**: Kod ove vrste zadataka nepoznatih sastavnica nema te se uvjeti postavljaju precizno i jasno, cilj je jasno postavljen, a teorijska osnova se uočava lako i bez neke dublje analize, uz to poznat je i način rješavanja zadatka. Ovakva vrsta matematičkog zadatka ne doprinosi razvoju učenikovih kreativnih sposobnosti, ali doprinosi boljem razumijevanju matematičkog sadržaja i njegovom bržem usvajanju.

**Nestandardne zadatke**: Karakteristika ovih zadataka je da je nepoznata barem jedna njihova sastavnica, a kada je nepoznato dvije ili više sastavnica nestandardni zadaci se tada nazivaju

**problemskima.** Rješavanje takve vrste zadataka je višestruko korisno jer oni omogućuju razvijanje učeničkog logičkog mišljenja, pojačan je umni napor te se formira dosjetljivost i ustrajnost (Kurnik, 2000).

Standardni zadaci se češće pojavljuju u nastavnim materijalima, ali i neki nestandardni zadatak kada ga se uvrsti u udžbenik i ponavlja ga se stalno on postaje standardan jer djeca nauče kako se ta vrsta zadataka rješava. Stoga se može reći kako neki zadatak koji je nestandardan danas ne znači da će biti nestandardan uvijek. Njegova struktura nije ta koja ga kategorizira je li on standardan ili ne već njegova interakcija s djecom pa tako isti zadatak za različite skupine učenika može biti standardan ili nestandardan.

## 5.2.) Problemski zadaci u nastavi matematike

U nastavi matematike važno je ponuditi i netradicionalne, autentične zadatke kojima nije naglasak samo na zatvorenim odgovorima i procedurama, takve zadatke koji će voditi razvijanju diskusija, koji će intelektualno stimulirati učenike, poticati razumijevanje te koji imaju više mogućih točnih pristupa i odgovora (Glasnović Gracin, 2015). Za rješavanje ovakvih zadataka potrebno je poznavati više metoda i teorijskih činjenica nego za zadatke s jednim rješenjem pa se u njima primjenjuje i aktivira veća količina znanja i postojeća znanja se produbljuju (Kurnik, 2008 prema Jurić i sur., 2019).

Sastavni dio nastave matematike su problemski zadaci s kojima se učenici susreću svakodnevno i koji trebaju povezati matematičke sadržaje sa dječjim spoznajama o svijetu (Klasnić, 2009). Tako Colvin (1987) ističe da ukoliko poučavanje matematike započne problemskim zadacima te ih djeca rješavaju uspješno i bez matematičke simbolike ono će biti dugoročno uspješnije i zanimljivije (prema Vizek Vidović i sur., 2014).

**Problem** je riječ starogrčkog podrijetla i označava zadatak koji se treba riješiti, teško pitanje ili okolnost koja izaziva brigu, nedoumicu i sumnju (Kadum, 1999). Szetala i Nicol (1992) ga definiraju kao situaciju u kojoj pojedinac ne poznaje proceduru ili algoritam koji će mu garantirati rješenje problema, ali ga on ima želju riješiti.

Osnovni elementi svih problemskih zadataka su **uvjet** (ono što je dato i poznato) koji ukazuje na vezu među danim podacima i onim traženima te **pitanje** (traženo, nepoznato) koje ukazuje na ono što se u zadatku traži (Delić-Zimić, 2015).

Strmčnik (2010) iznosi četiri karakteristike matematičkih problema:

- predstavlja dovoljno izazovnu problemsku situaciju
- relevantan je za studenta
- ne može se riješiti samo iskustvom koje se posjeduje
- situacija treba izazivati interes i želju da ju se riješi

Ne može se zaključiti dobar problemski zadatak ima više točnih rješenja, mnoštvo strategija za rješavanje, njime se potiče motivacija, trud i mašta učenika, potiče im intelektualnu aktivnost i međusobnu komunikaciju (Mišurac, 2014). Ojačavaju potrebu za razumijevanjem i korištenjem različiti matematičkih strategija, svojstava i odnosa, a proizlaze iz okruženja učenika ili čistog matematičkog konteksta (Martin, W. G. i sur., 2000).

### **5.3.) Problemski orijentirana nastava**

Kako bi se kod učenika razvile kreativne i stvaralačke sposobnosti, suvremene nastavne metode ih stavljaju u problemske situacije koje od njih zahtijevaju intelektualne napore (Obradović, 1998). Odnosno da bi se nadišli nedostaci tradicionalne nastave osmišljavaju se nastavni sustavi u kojima učenike, osim što im se prenose određena znanja, nastoji osposobiti i da samostalno mogu rješavati određene probleme s kojima se mogu susresti i kasnije u životu (Janković, 2016).

Početna nastava matematike bi trebala započinjati rješavanjem problema koji se nalaze u djetetovoj okolini te se postupno usmjeravati prema apstraktnim matematičkim znakovima i pojmovima (Mišurac, 2014). Glavni cilj ovakve vrste nastave jest kod učenika razviti opću sposobnost rješavanja stvarnih životnih problema i primjenjivanja matematike u njima (Guzman Gurat, 2018). Problemsku nastavu karakterizira to što učenici sami rješavaju zadane zadatke čije im je rješenje nepoznato, a koji su već riješeni u društvenoj praksi i znanosti. Također ih se postavlja kao subjekte odgojno-obrazovnog procesa koji aktivno oblikuju svoj proces učenja (Kadum, 2005).

U matematičkom kurikulumu središnje mjesto problemi su zauzimali od antičkog doba, ali tek 1980-ih metodičari matematike su se složili da fokus nastave matematike postane rješavanje problema i razvijanje sposobnosti odnosno da ono bude način poučavanja i ispunjavanja ciljeva obrazovanja (Kuzle, 2016). Vrlo bitna pretpostavka kako bi se problemska nastava uspješno

primjenjivala jest da učenici budu osposobljeni primjereno za umni rad jer je njegov razvoj najbolje postiže u ovoj vrsti nastave. Stoga bi uvažavajući dob učenika, njihove matematičke sposobnosti i psihički razvoj ovu nastavu trebalo primjenjivati unutar svih razina matematičkog obrazovanja (Kurnik, 2006).

Schroeder i Lester (1989) iznose tri načina na koja se problemski zadaci i njihovo rješavanje može ukomponirati u nastavu matematike:

***Poučavanje za rješavanje problema:*** Započinje učenjem apstraktnih pojmova i koncepata te se zatim prebacuje na rješavanje problemskih zadataka kao sredstva za primjenu, učvršćivanje naučenih vještina. Učenici prvo nauče metodu rješavanja neke vrste zadataka i kada ju usavrše rješavaju zadatke

***Poučavanje o rješavanju problema:*** Ovaj pristup uključuje poučavanje učenika kako da rješavaju problemske zadatke odnosno uči ih se proces rješavanja ili strategije rješavanja problemskih zadataka.

***Poučavanje kroz rješavanje problemskih zadataka:*** Učenici u ovom pristupu matematiku uče kroz stvarne situacije, kontekste probleme i modele to jest problem se predstavlja na početku sata, a vještine i znanja se razvijaju radeći na problemu (prema Van de Wale i sur., 2010). Ono omogućava učeniku veću misaonu te stvaralačku aktivnost, dolazi do njegove afirmacije kao aktivnog sudionika u nastavnom procesu, postaje istraživač koji razvija svoje stvaralačko mišljenje, inicijativu i sud (Rosandić, 1974 prema Kadum, 1999). Ovaj proces kod učenika kombinira, povezuje i integrira informacije u znanje te mu omogućuje transformaciju novih informacija. Naglasak se ne stavlja toliko na ishode učenja koliko na sami njegov proces pa se može i reći da je ovo učenje za učenje (Kramberger Rom, 2020).

Organizacija nastavnog sata vrlo je bitna u nastavi pa tako i kod problemski orijentirane nastave stoga Pecko (2015) donosi 5 etapa kroz koje smatra da bi sat problemski orijentirane nastave trebao prolaziti: 1) motivacija, 2) upoznavanje problema, 3) rješavanje problema, 4) vježbanje i ponavljanje kroz izvođenje istraživanja i 5) provjeravanje i primjena.

Metodika matematike je s obzirom na značajke i težinu problemske nastave razvila shemu po kojoj se priprema i oblikuje ova vrsta nastavnog sata: **1)** Stvara se problemska situacija, a nastavnikov cilj je buđenje interesa kod učenika za sadržaj i njegovu obradu

**2)** Postavlja se problem koji proizlazi iz problemske situacije

**3)** Proučavanje uvjeta u kojem učenici analiziraju situaciju i otkrivaju način za rješavanje



- 4) Rješava se postavljeni problem. Ovo je najstroženiji dio procesa i učenici ga izvode samostalno dok nastavnik samo usmjerava rad
- 5) Razmatra se dobiveno rješenje i iskazuje se novo znanje
- 6) Proučava se dobiveno rješenje i traže neki drugi načini za rješavanje
- 7) Proučava se moguće proširenje i poopćava se postavljeni problem
- 8) Učenici i učitelj iznose zaključke rada i razmatraju primjenu novostečenog znanja (Kurnik, 2002).

U nastavi matematike se problemska nastava ističe kao jedan od najefikasnijih modela za učenje u kojem se u prvi plan stavlja sam učenik. Ona učeniku dopušta da predlaže rješenja, samostalno istražuje i sam smišlja načine rješavanja gdje mu se maksimalno uvažavaju njegove osobine i mogućnosti te tako zadovoljava zahtjeve za individualizacijom nastavnog procesa (Janković, 2016).

Problemski zadaci i njihovo uvrštavanje u nastavu matematike ne znači nužno da je ta nastava problemski orijentirana. Ako je nastava matematike orijentirana tako da učitelj uvježbava neke problemske zadatke s učenicima frontalnim načinom na ploči, a ne daje im prostor i vrijeme u kojem će oni samostalno istraživati i pronalaziti načine i puteve rješavanja onda takva nastava nije problemski orijentirana. Naravno kao i kod podjele nastave na tradicionalnu i suvremeni, problemska nastava ne mora uvijek biti u svakom aspektu nastavnog sata, dana, a ponekad i tjedna. Stoga valja dobro izbalansirati odnose kako bi se kod učenika postigli najbolji rezultati.

#### **5.4.) Uloga učitelja u problemski orijentiranoj nastavi**

Od početka školovanja za kvalitetnu nastavu je potreban kvalitetan i kompetentan učitelj koji zna kako će u vlastitu nastavnu praksu uključiti i suvremene metodičke spoznaje. Prve stručne osobe koje kod učenika sustavno izgrađuju matematička umijeća, stavove i znanja na početku školovanja su učitelji razredne nastave stoga imaju vrlo složen i važan zadatak (Mišurac, 2014). Tri vrste znanja su potrebne učitelju za poučavanje u nastavi matematike: znanje matematike, znanje o učenicima i u znanje nastavnih praksi.

**Znanje matematike:** Podrazumijeva poznavanje matematičkih koncepata, činjenica, procedura i odnosa među njima i dr., ali znanje matematike za poučavanje uključuje nešto više od

poznavanja samo ovih elemenata. Učitelji moraju razumjeti matematiku na način koji im omogućava objašnjavanje i iznošenje ideja tako da ih mogu prenijeti drugima.

**Znanje o učenicima:** Odnosi se na poznavanje učenika i načina na koji oni uče matematiku odnosno uključuje znanje kako pojedini učenici razvijaju matematičke ideje tijekom vremena i gdje se na razvojnoj putanji nalaze.

**Znanje nastavnih praksi:** Uključuje znanje o zadacima i alatima za poučavanje važnih matematičkih ideja, kako organizirati i upravljati razredom, poznavanje kurikulumuma i razrednih normi koje podupiru razvoj matematičke stručnosti (Kilpatrick i sur., 2001).

Također brojna istraživanja pokazuju kako učitelji svojim stavovima, kompetencijama i načinom rada u predmetu kojeg poučavaju bitno utječu na učenikova ukupna postignuća. (Jurić i sur., 2019). Lakše motiviraju i uspješniji su oni učitelji koji vladaju dobro različitim nastavnim metodama (Kurnik, 2007), a jedna od tih metoda jest i poučavanje kroz rješavanje problemskih zadataka.

Karakteristika poučavanja kroz rješavanje problemskih zadataka jest da zahtijeva da učenik bude u centru (student-center learning). Kada se govori o ovoj vrsti poučavanja učitelj i učenik imaju interaktivan proces, gdje se učitelj iz pozicije pukog predavača preusmjerava u osobu koja učenike vodi kroz proces učenja (Benet, 1976 prema Hodnik Čadež i Kolar, 2017). Tijekom cijelog procesa izvođenja nastave orijentirane na problem nastavnik ima ulogu vodiča kroz obrazovno iskustvo, a učenik aktivno sudjeluje stvaranju vlastitog znanja. Kod učenika on treba razvijati i poticati motivaciju za učenje i istraživači duh, a uz sve to mora paziti da svaki nastavni sat metodički razradi (Janković, 2016). Učitelj svoju ulogu kao izvora znanja gubi i postaje ustrojitelj i organizator nastavnog rada. Zadatak mu je učenike poticati na istraživanje, postavljanje pretpostavki, izradu planova i modela, tumačenje podataka te da pazi kako središnje dio nastave ne postane samo pamćenje činjenica (De Zan, 1999 prema Pecko, 2015).

Učinkovitost poučavanja ovisi o umijeću nastavnika za stvaranje nastavnih situacija kroz koje učenici svojom aktivnošću samostalno uče (Horvat, 2018). Stoga je ključni dio poučavanja kroz probleme odabir odgovarajućih problema i zadataka. Oni su učinkoviti kada učeniku pomažu naučiti one ideje koje ih je učitelj prvotno namjeravao poučiti (Van de Wale i sur, 2010). Osim toga kvalitetnim odabirom problema učitelj dobiva nešto drugačiji uvid u način učenikova razmišljanja (Kramberger Rom, 2020).

Istraživači matematike su tijekom trideset godina istraživanja ustvrdili najmanje sedam načina kako poučavati kroz rješavanje problema jer učenicima pomažu razvijati sposobnosti (Slika 5).

1. Zadavati mnogo problema.
2. Zadavati "dobre" probleme.
3. Poučavati specifične ili opće strategije rješavanja problema (uključujući i heuristiku).
4. Pokazati primjere rješavanja problema.
5. Ograničiti nastavnikovu dominaciju – na primjer, tako da učenici rade u malim grupama.
6. Promicati metakogniciju – na primjer, postavljanjem metakognitivnih pitanja ili poticanjem učenika na promišljanje.
7. Istaknuti više rješenja.

**Slika 5:** Sedam načina za poučavanje rješavanja problema

Međutim Kilpatrick (1985) iznosi pet kategorija koje se u problemskoj nastavi kombiniraju: **Osmoza**- učenicima se daje što više problemskih zadataka koje trebaju riješiti

**Memoriranje**- učenike se poučava heurističkim strategijama kao postupcima za primjenjivanje pri rješavanju problema

**Imitacija**- kroz nastavnikove se odabrane primjere stječu sposobnosti za rješavanje

**Suradnja**- učenici u grupama rješavaju neke probleme

**Refleksija**- nakon što je riješio problem učenika navesti da se osvrne na njegovo rješavanje i procjeni djelotvornost svojih postupaka (prema Kuzle, 2016).

Uloga učitelja se očituje u vođenju učenika i prepoznavanju rješenja učenika koji mogu pridonijeti oblikovanju matematičkih generalizacija i zaključaka te pridonose daljnjem razvoju aktivnosti. Za zaključiti je da „kod uvođenje rješavanja problema u proces učenja učitelj igra iznimno važnu ulogu, kako u znanju koje posjeduje, tako i iz perspektive odabira dobrog problema, načina prenošenja problema učenicima, i na kraju, ali ne manje važno, usmjeravanju učenika pri rješavanju problema“ (Kolar, 2018: 152).

## 5.5.) Rješavanje problemskih zadataka u nastavi matematike

U školi kao i u životu se radni i misaoni postupci manifestiraju, nude i prezentiraju u obliku različitih problema koje trebamo riješiti. Učenje putem rješavanja problema je najproduktivniji oblik stvaralačkog mišljenja i učenja te teko određuje izgradnju nove i kvalitetnije podloge za usvajanje matematičkih sadržaja (Kadum, 2005a). Stoga Reys i sur. (2001) i Schoenfeld (1992) ističu kako rješavanje problemskih zadataka u matematici može pomoći učenicima da razviju i unaprijede svoje kritičko razmišljanje i rasuđivanje, razviju dublje razumijevanje koncepata te tako unaprijede sposobnosti rješavanja stvarnih životnih problema (prema Guzman Gurat, 2018). Ono kao najviši oblik učenja se sastoji od otkrivanja veza i odnosa između dobivenih podataka i rješenja pri čemu je učenikova aktivnost maksimalna. Da bi došao do rješenja koristi se prethodno stečenim znanjima i iskustvima te se usputno susreće s malim ili nešto većim teškoćama (Kadum, 2005b).

*„Rješavanje problema znači ulaženje i uživljanje u nepoznatu problemsku situaciju za koju metoda rješavanja nije unaprijed zadana. Da bi pronašli rješenje, učenici moraju prebirati po svom dotadašnjem znanju, a kroz taj se proces razvija i proširuje njihovo konceptualno matematičko razumijevanje“* (Mišurac, 2014: 65).

U nastavi matematike, metodu rada kroz rješavanja problema razlikujemo prema dijelovima sata u kojima se koristi. Tijekom korištenja na satu *obrade novog gradiva*, rješavanje problemskih zadataka, služi kao metoda za otkrivanje novih matematičkih znanja, koncepata i procedura dok na satu *ponavljanja* služi za povezivanje, produbljivanje i razvijanje novih znanja o nekom konceptu (Cindrić, 2016). Bez obzira u kojoj vrsti nastavnog sata se rješavanje problemskog zadatka koristi, zadatak mora imati slijedeće karakteristike:

- *Treba započinjati tamo gdje su učenici*- u obzir se treba uzeti gdje se učenici sa svojim znanjem trenutno nalaze, da imaju barem nekakvu ideju za rješavanje problema a da ga istodobno vide kao zanimljiv izazov
- *Mora postojati angažirajući aspekt zadatka kroz koji će učenici učiti matematiku*- učenici tijekom rješavanja zadatka primarno moraju razvijati smisao za matematiku koja je uključena u zadatak odnosno razumijevati matematiku koju on koristi
- *Zadatak mora zahtijevati potvrdu i objašnjenje za korištene metode i dobiveni rezultat*- nakon rješavanja učenik treba znati pojasniti kako je došao do rješenja i opravdati ga, ovo bi trebao biti jedan od ključnih dijelova rješavanja zadataka (Van de Wale i sur., 2010).

Kao vrlo složeno ljudsko djelovanje, rješavanje problema uključuje mnogo više od prisjećanja i primjene postupaka koji su prethodno usvojeni. Ono zahtjeva mnogobrojne kognitivne aktivnosti i posjedovanje različitih vrsta znanja (Kuzle, 2016). Stoga postoje određene misaone faze kroz koje učenici prolaze za vrijeme učenja, rješavajući problemske zadatke:

- **Faza preparacije:** učenici se upoznaju s određenim problemom i suočavaju s početnim teškoćama i preprekama
- **Faza inkubacije:** u njoj se problem nalazi po strani u fazi je prividnog mirovanja
- **Faza iluminacije:** dobiva se inspiracija za rješavanje problema
- **Faza verifikacije:** ovo je faza provjeravanja i provodi se na zadacima koji su slični ili koji imaju neke nove problemske zahtjeve .

Navedene misaone etape se kasnije transformiraju u primjerene radne etape na temelju kojih se razvija proces po kojem se problemski zadaci rješavaju (Kadum, 1999). Djeca razvijaju svoje temeljne matematičke spoznaje u neposrednoj interakciji s vlastitom okolinom (Vlahović Štetić i Vizek Vidović, 1998), ne preuzimaju ih gotove iz nje nego ih aktivno stvaraju (Mišurac Zorica i Plazibat, 2005). Da bi učenici aktivno stvarali svoje znanje tijekom rješavanja problemskih zadataka Schoenfeld (1985) i De Corte (1995) ističu kako im je potrebno:

**Bazično znanje-** uspješno rješavanje zahtjeva dobro organizirano i fleksibilno znanje i poznavanje pravila

**Skup strategija za rješavanje problema-** bez njih rješavanje zadataka nije moguće

**Metakognitivne kompetencije-** učenik je sposoban efektivno koristiti svoje znanje kako bi riješio problem

**Vjerovanje da problem vrijedi riješiti-** na problem gleda kao da je vrijedan rješavanja, odvaja svoje vrijeme za riješiti ga i smatra da posjeduje kompetencije da ga riješi (prema Andrews i Xenofontos, 2015).

Cilj rješavanja problema za učenike jest da mogu upotrijebiti problemsku situaciju kao pristup apstrakciji i generalizaciji odnosno razviti sposobnost matematizacije situacija (Kilpatrick, J. i sur., 2003). U većini slučajeva se realni problemi rješavaju matematiziranjem određene situacije i to: gradeći matematički model prema adekvatnoj realnoj situaciji, rješavanjem utvrđenog matematičkog modela i prenoseći rješenje matematičkog problema u realan svijet (Cotić i Felda, 2011).

Standard koji je postavljen na svim razinama obrazovanja i koji služi dostizanju matematičkih kompetencija omogućuje svim učenicima da:

- kroz rješavanje problema izgrađuju novo matematičko znanje
- rješavaju probleme koje nastaju u matematičkim i drugim kontekstima
- primjenjuju i prilagođavaju različite prikladne strategije kako bi došli do rješenja
- promišljaju i prate proces rješavanja problema u matematici (Martin, W. G. i sur., 2000).

*„Učenje kroz primjenu problemskih zadataka, komunikaciju, osvještavanje matematičkih ideja te stalna povezivanja i raznolike refleksije ključan je faktor uspješne nastave matematike, a time i uspješnog društva u cjelini“* (Kos i Glasnović Gracin, 2012: 8).

Važnost problemskih zadataka i njihovo rješavanje prepoznao je i jedan mađarski matematičar koji u svojem djelovanju nastoji unaprijediti metodiku nastave matematike tako da ona bude usmjerena na učenika i da se na nju gleda kao na zajednički rad učenika i učitelja, a njegovo ime je George Polya.

Nastavnici u takvom procesu metodički vode učenike kako bi oni stekli kompetencije i samostalno rješavali zadatke (Matijević, 2011). Rješavajući neki problemski zadatak stajalište s kojeg ga se razmatra se više puta mijenja. U početku je predodžba dosta nepotpuna, a kako se napreduje ona se mijenja i drugačija je pred sam kraj rješavanja nego na početku. (Polya, 1966). Godine 1945. objavljuje svoju najuspješniju knjigu *„How to solve it“* u kojoj se bavi rješavanjem problema i iznosi svoj poznati model kroz koji donosi četiri faze rješavanja problemskog zadatka.

Prvo, potrebno je **razumjeti zadatak** odnosno treba vidjeti jasno što se u njemu traži, zatim je važno razmotriti međusobno povezane elemente tj. pronaći vezu između zadanih podataka i nepoznanica kako bi se došlo do ideje za rješavanje i razradio **plan**. Potom se plan **izvršava** i na kraju se provjerava i diskutira o dobivenom rješenju odnosno vrši se **osvrt** (Polya, 1966). Kako ističe Ersoy (2017) ove faze rješavanja problemskih zadataka su osnovni uvjet kako bi učenik postao uspješan u rješavanju problema. Također i Kadum (1999) potvrđuje rekavši kako je kod rješavanje problema jedna od osnovnih zakonitosti više etapnosti ili višefaznost odnosno učenje kroz rješavanje problema posjeduje svoj osobit proces i strukturu.

**Razumijevanje problema:** Ponajprije da bi učenik mogao razumjeti zadatak on mora biti dobro odabran tj. trebao bi biti zanimljiv i za uzrast učenika ne pretežak niti prelagan (Jurić i sur., 2019). Potom učenik bi, za postavljeni problem, trebao pokazivati interes i želju za njegovim rješavanjem jer bez toga zadatak zasigurno neće biti riješen (Kadum, 1999). Kako bi ga razumio učenik treba s različitih strana i više puta pažljivo razmotriti njegove glavne dijelove: uvjet, zadane podatke i nepoznanicu (Polya, 1966).

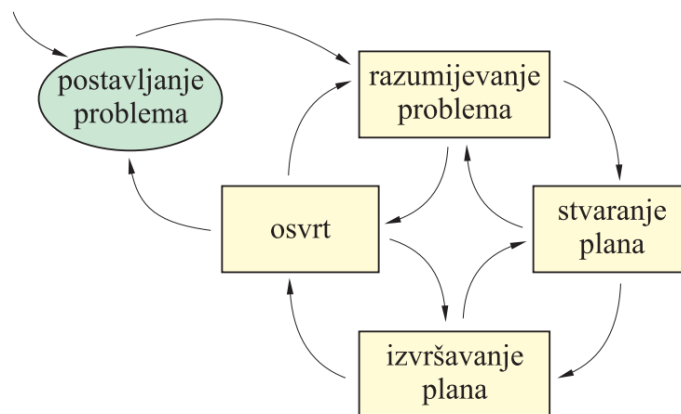
**Razvijanje plana:** Kada učenik zna koje transformacije, račune i konstrukcije koristiti da dobije nepoznanicu znači da on posjeduje plan za rješavanje. Ideja kako riješiti zadatak može dolaziti postepeno, ali je ona vrlo bitna (Polya, 1966) jer dobro ideja predstavlja garanciju i siguran put dolaska do rješenja (Kadum, 1999).

**Izvršavanje plana:** Izvršiti plan je mnogo lakše nego do njega doći jer za njega treba uglavnom malo strpljenja (Polya, 1966). Plan se realizira strpljivo, idući po redu tako da se detalj po detalj ispituje i rješava dok se konačno ne dođe do cilja odnosno rješenja zadatka, što od učenika zahtjeva kontroliranje svih koraka i koncentraciju (Kadum, 1999).

**Pogled unatrag, osvrt:** Osvrćući se na gotovo rješenje zadatka to jest ponovnim preispitivanjem i razmatranjem rezultata i puta kojim se do njega došlo učenici mogu svoje znanje učvrstiti i unaprijediti svoje sposobnosti rješavanja (Polya, 1966). Tijekom rješavanja zadatka uvijek su moguće pogreške i zato je nužno rezultate provjeriti pa bi učitelj od učenika trebao zahtijevati da se na dobiveno rješenje osvrnu. Najbolja provjera ispravnosti rezultata bilo bi ponovno rješavanje problema nekom novom, drugačijom metodom (Kadum, 1999).

Nakon posljednje faze rješavanja zadataka iz lekcije učenici bi trebali razmijeniti međusobno svoje strategije kako su riješili zadatak i pojasniti kako znaju da je ono što su dobili točno (Van de Wale i sur, 2010). Kako ističe Kadum (1999) svaka od ove četiri etape je podjednako važna i izostavljanje bilo koje od njih, tijekom rješavanja zadatka, ne bi se smjelo dopustiti.

Na Polyine četiri faze Brawn i Walter dodaju fazu vraćanja na problem jer proces rješavanja problemskih zadataka nije linearan već je ponavljajuć, cikličan i dinamičan odnosno u svakom trenutku učenik se može vratiti u neki od prethodnih koraka kako bi razriješio neku svoju nedoumicu (Wilson i sur., 1993 prema Kuzle, 2016).



**Slika 6:** *Dinamičko-ciklička interpretacija modela Georga Polye*

### 5.5.1.) Modeliranje u nastavi matematike

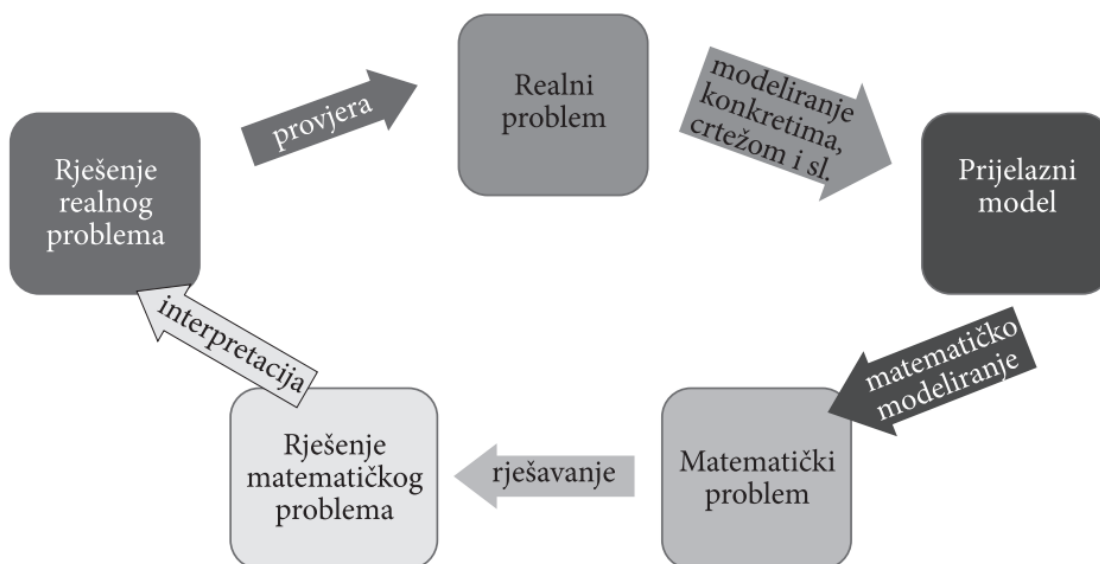
Modeliranje u nastavi matematike je vrlo važan interaktivni proces putem kojeg se učenici susreću s problemskim situacijama iz stvarnog svijeta odnosno iz svog okruženja (Sabo Junger i Lipovec, 2022). Zadatak nastave matematike jest da osposobi učenike raznih uzrasta za rješavanje matematičkih problema pa tako matematičko modeliranje kao proces ima svoju evoluciju i postupnost te se razvija od najjednostavnijih modela kod male djece pa sve do složenih modela koji se koriste u srednjoj školi (Andrić, 2017). Kako istraživanja Carpentera i sur. (1993) iznose, od ranih godina djeca posjeduju intuitivne modele koji igraju vrlo važnu ulogu pri analiziranju podataka i iznalaženju rješenja, a učiteljima mogu poslužiti kao podloga za uvođenje i objašnjavanje nekih matematičkih radnji (prema Rudić i Cindrić, 2012). Stoga se s osnovama matematičkog modeliranja može i treba započeti u osnovnoj školi jer djeca već posjeduju osnovne kompetencije za razvijanje matematičkog modeliranja (English i Watters, 2004 prema Junger i Lipovec, 2022).

Pod matematičkim modeliranjem se podrazumijeva put kojim se realna situacija preoblikuje u matematički zadatak pa se rješavanjem tog matematičkog zadatka dobiva i rješenje za situaciju iz realnog svijeta (Cindrić, 2016). „*Model je simbolička reprezentacija nekog aspekta realnog svijeta*“. Za primjer se može uzeti geografska mapa koja je grafička reprezentacija zemljine površine pa tako predstavlja njen model, a kada se u opisivanju modela isključivo koristi matematički jezik onda je riječ o matematičkom modelu (Dražić, 2017: 84). Testira se i pronalazi matematički model za proces ili objekt u realnom svijetu. Odnosno u realnu situaciju



se unose principi i načela matematike tako se realnost prevodi u matematičku okolinu (Žakelj, 2015). Jednostavnije rečeno „matematičko modeliranje vodi djecu u stvarne situacije gdje se svakodnevnih stvari izražavaju matematičkim jezikom i simbolima“ (Begović, 2017: 17).

Kada se u početnoj nastavi uvodi matematičko modeliranje i rješavanje problema često se vodi pogrešnom pretpostavkom da učenici moraju imati neke vještine računanja. Umjesto toga rješavanje zadatka i modeliranje problema ne mora rezultirati samo matematičkim modelom već može doći do oblikovanja i prijelaznog modela realne situacije kojim se zatim dolazi do matematičkog modela (Cindrić, 2016). Kako ističe Žakelj (2015) pravilo je da kada se realne situacije modeliraju postoji mogućnost za više rješenja (modela) od kojih niti jedan nije u potpunosti ispravan, ali je moguće da je više ili manje prikladan.



**Slika 7:** Modeliranje u nastavi matematike

Njegova primjena omogućuje da se matematičke ideje povezuju, s učenicima zanimljivim, izvanmatematičkim situacijama što dovodi do toga da se ono može koristiti za uvježbavanje, motiviranje, produblivanje znanja, ali i kao pokazatelj važnosti matematike. Učenici kroz matematičko modeliranje pokazuju stečenu sposobnost da ono što je naučeno u razredu mogu primijeniti na realan svijet, a sve to kako bi analizirali nastale problemske situacije, predviđali i donosili zaključke (Gusić, 2017). Kod matematičkog modeliranja kao glavni cilj se ne ističe

stalno pronalaženje jedinstvenog rješenja već je važno razmišljanje o problemima i njihovo razumijevanje kada se s njima suoči u stvarnom svijetu (Sabo Junger i Lipovec, 2022).

Kada se želi modelirati neki realni proces ili objekt bitno je da se istaknu njegovi sastavni dijelovi tj. čimbenici koji se dijele u tri skupine:

- *zanemarujući čimbenici*: koji na model ne utječu

- *egzogeni čimbenici*: oni su dio modela i na njega utječu, ali namjena modela nije njihovo proučavanje

- *endogeni čimbenici*: dio su modela i njih model opisuje

Ove tri kategorije su vrlo bitne za proces modeliranja i ako se zanemare neki važni elementi od modela nema nikakve koristi (Dražić, 2017).

Prema nekim teorijama razlikuju se tri vrste/pristupa zadacima modeliranja:

**Standardno modeliranje**: učenici primjenjuju naučeni model u kontroliranim uvjetima

**Direktno modeliranje**: uz pomoć nastavnika učenici odabirući neki od naučenih modela rješavaju realne probleme

**Otvoreno modeliranje**: učenici samostalno rješavaju postavljeni problem (Gusić, 2017).

Proces modeliranja s didaktičkog gledišta označava „*dublje promišljanje o matematičkom znanju*“ jer koristeći ga učenik oblikuje pretpostavke, interpretira, generalizira i stvara kritičke odnose prema rezultatima. (Žakelj, 2015). Modeliranjem problema iz realnog svijeta učenicima se približava matematika te im na matematički svijet daje nove poglede (Begović, 2015).

U sljedećim primjerima vidjeti će se da se teza Englisha i Wattersa sama potvrđuje to jest da djeca u osnovnoj školi stvarno posjeduju kompetencije za razvijanje matematičkog modeliranja. U **slici 8** se vidi kako učenik prvog razreda da bi saznao koliko je praznih mjesta ostalo na parkiralištu crta parkirna mjesta zatim prvi red popunjava (crta) automobilima te mu tako u prvom redu ostaje jedno prazno mjesto što pored reda označava brojkom 1, a preostala dva reda ostavlja praznima i dodaje im broj praznih mjesta 5 i 6 te na kraju zbraja broj praznih mjesta iz sva tri reda te dobiva rješenje zadatka. Dakle učenik kako bi riješio zadatak crta danu situaciju, služeći se crtežom zatim uviđa odnos praznih i popunjenih mjesta što označava brojkama te brojeve praznih mjesta zbraja i dolazi do rješenja.

3.)  
a)

BOK JA SAM NIKO, RADIM NA PARKIRALIŠTU ZA AUTOMOBILE.

PARKIRALIŠTE IMA 3 REDA. PRVI RED IMA 8, DRUGI 5 I TREĆI RED IMA 6 PARKIRNIH MJESTA. U PRVOM REDU JE PARKIRANO 7 AUTOMOBILA.

KOLIKO JE PRAZNOG MJESTA OSTALO NA PARKIRALIŠTU?

ODGOVOR: NA PARKIRALIŠTU JE OSTALO 12 PRAZNIH MJESTA.

8 1  
5 5  
6 6

$1 + 5 + 6 = 12$

**Slika 8:** Primjer rješenja trećeg zadatka 1. r.

Sljedeća **slika br. 9** prikazuje kako učenik koji još nije najbolje savladao matematičku operaciju oduzimanja modeliranjem dane situacije iznalazi rješenje. On crta novčiće koje dječak ima, zatim križa one koje je potrošio te mu ostaje rješenje od 13 novčića. Iako učenik nije dobio točno rješenje jer u prethodnom djelu zadatka nije dobro zbrojio primijenio je dobar model kako bi došao do rješenja.

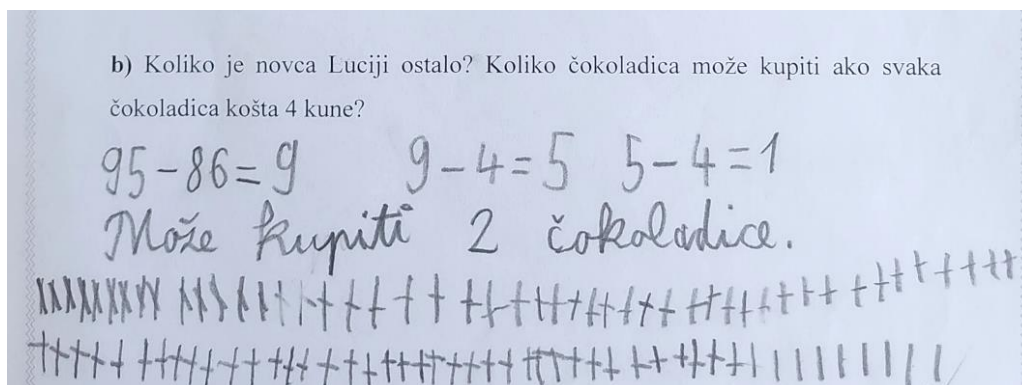
KUPIO SAM LIZALICU ZA 6 KUNA. KOLIKO KUNA MI JE OSTALO?

NAKON ŠTO SAM KUPIO LIZALICU OSTALO MI JE 13 KUNA.

$19 - 6 = 13$

**Slika 9:** Primjer rješavanja drugog zadatka 1. r.

Posljednji primjer, **slika 10** prikazuje način rješavanja učenika drugog razreda koji ne znajući pisano oduzeti dva dvoznamenkasta broja crta 95 štapića/crtica te križa njih 86 kako bi saznao koliko je novca djevojčici ostalo i koliko čokoladica može na kraju kupiti.



**Slika 10:** Primjer rješavanja prvog zadatka 2.r.

Iz ovih primjera možemo vidjeti i potvrditi kako učenici uistinu ne moraju poznavati neku računsku operaciju da bi bili sposobni rješavati zadatke. Oni svojom kreativnošću, koristeći se vlastitom logikom kroz modeliranjem dolaze do rješenja, na ovaj način dublje razmišljaju o samom zadatku, matematika im postaje bliža, razumljivija i stvaraju veze koje će im biti korisne za buduće realne probleme.

Svaki učenik rješavajući zadatke kroz modeliranje koristio je i nešto zvano **reprezentacije** koje u njihovom slučaju predstavljaju neke slike/simbole kojima si oni predstavljaju odnosno reprezentiraju matematički problem kako bih ga lakše shvatili i riješili. One tako predstavljaju vrlo važan element u prepoznavanju povezanosti među srodnim matematičkim konceptima i primjenjivanju matematike u realnim životnim situacijama kroz samo modeliranje. Ponajprije zbog toga što je način na koji učenici predstavljaju svoje matematičke ideje vrlo važan i kroz njega se vidi koliko razumiju i koriste li ispravno svoje ideje (Kilpatrick, J. i sur., 2003).

Reprezentacije su neki grafovi, simboli, dijagrami, karte ... kojima se prikazuju odnosno predstavljaju matematičke veze, pojmovi i ideje. One su zapravo matematički simbolizam na koji učenici trebaju gledati kao na način predstavljanja matematičkih ideja drugim ljudima (Van de Wale i sur., 2010). Reprezentacijom matematičkih ideja od učenika se traži da otkriju i razviju način razmišljanja ili alate kako bi svoje matematičke ideje učvrstili i od apstraktnog ih doveli do nečeg jednostavnijeg za razumijevanje (Sahendra i sur., 2018). Stoga odabir određene

reprezentacije osim o matematičkom kontekstu ovisi i o onome tko matematički problem rješava (Nistal i sur., 2009 prema Hodnik Čadež i Kolar, 2017). Najšire pojašnjeno reprezentacija se može gledati kao nešto što predstavlja nešto drugo i mora uključivati neku vezu između simbola i onog što on prikazuje (Kilpatrick, J. i sur., 2003).

Lesh i sur. (1983) navode da postoji pet vrsta reprezentacija koje su korisne za razumijevanje matematike: manipulativni modeli, stvarno životno iskustvo, riječi, slike i dijagrami te pisani simboli. Međutim Bruner (1966) je te iste reprezentacije svrstao u tri kategorije pa stvarno životno iskustvo i manipulativni modeli spadaju pod *aktivne*, riječi i zapisani simboli pod *simbolične* te slike i dijagrame pod *ikonske* reprezentacije (prema Awantagusnik i sur., 2021).

Razloge zašto je poželjno koristiti reprezentacije istaknuli su Budiharso i Tarman (2020): Prvo, tečnost u prelaženju između različitih vrsta reprezentacija predstavlja osnovnu vještinu koja omogućuje učenicima da se razvijaju i uče matematiku te drugo da su učenici pripremljeni za razvijanje i prilagođavanje vlastitih reprezentacija koje se mogu koristiti u rješavanju problema (prema Utomo i Syarifah, 2021).

Najvažnije u matematici jest prikazivanje apstraktnih matematičkih pojmova, što se čini reprezentacijama koje postoje u dvije faze: unutarnje i vanjske. Za razliku od vanjskih reprezentacija, o kojima se govorilo u prethodnom tekstu, koje predstavljaju simboličke elemente koji prikazuju matematičku stvarnost i koje se koriste u nastavi matematike, unutarnje se reprezentacije odnose na učenikove mentalne slike (Hodnik Čadež i Kolar, 2017).

Unutarnje reprezentacije su znanja i strukture u memoriji koji su dijelovi kognitivnog procesa, nije ih moguće vizualno promatrati niti direktno vrednovati jer predstavljaju mentalne aktivnosti uma (Sahendra i sur., 2018) one mogu biti dojmovi, percepcije, vizualizirani ili zamišljeni objekti i simboli, a ponekad čak i emocije (Zajonc, 1980 prema Kilpatrick, J. i sur., 2003). Drugim riječima osoba koja stvara unutarnje reprezentacije tijekom učenja matematike razmišlja o idejama, matematičkim konceptima to jest ona uči kako bi razumjela problem i povezala ga sa svojim znanjem i stvorila plan (Sahendra i sur., 2018).

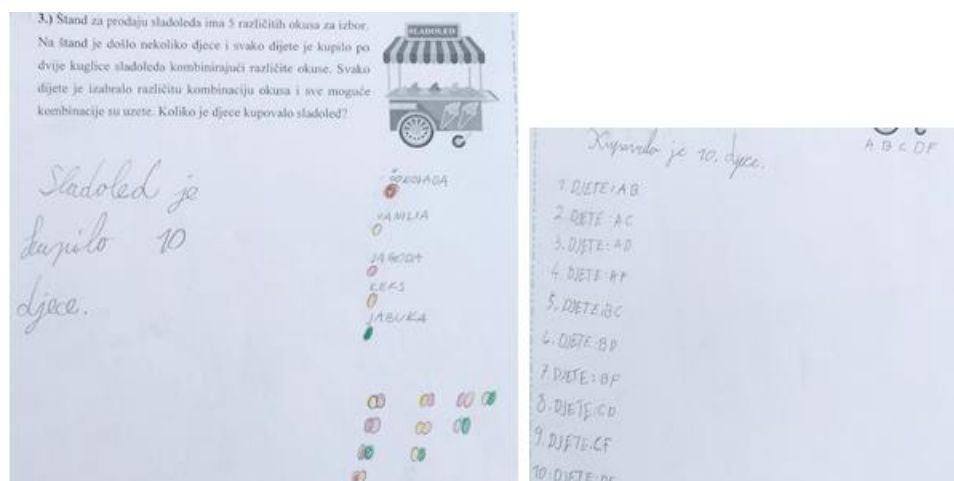
U matematičkom obrazovanju ključnu ulogu imaju reprezentacije matematičkih pojmova, a njih je Chapman (2010) podijelio na reprezentacije kao:

- **način razmišljanja**- odnosi se na unutarnje reprezentacije (interpretira se reprezentirano)
- **način predstavljanja**- ideja i njihova zapisivanja (reprezentira se ono što je promišljeno)

• **sredstvo komunikacije**- (kada se nešto tumači, pojašnjava) (prema Hodnik Čadež i Kolar, 2017).

Programi kroz osnovno školstvo koji koriste reprezentacije tijekom učenja učenicima trebali omogućiti: korištenje reprezentacija da zabilježe, organiziraju i komuniciraju matematičke ideje, zatim da mogu izabrati, primijeniti i prelaziti između matematičkih reprezentacije kako bi riješili probleme te da ih koriste kao model za prikazivanje socijalnog, fizičkog i matematičkog svijeta (Martin, W. G. i sur., 2000).

Sljedeći primjeri prikazuju radove učenika koji su modeliranjem i korištenjem reprezentacija pokušali doći do rješenja zadatka. Tako na **slici 11** se vidi kako dva učenika za isti zadatak koriste drugačije reprezentacije, ali im je model rješavanja vrlo sličan i dolaze do istog rješenja. Prvi učenik crta kuglice sladoleda različitih okusa i boja ih različitim bojama kako bi ih bolje raspoznao te ih zatim kombinira pazeći da se boje u paru ne ponavljaju. Istu stvar čini i drugi učenik, ali on svoje kuglice označuje velikim početnim slovima (A,B,C,D.F) te ih tako kombinira.



**Slika 11:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 3.r.

Ono što je važno jest da učenici razumiju kako su pisane reprezentacije njihovih matematičkih ideja ključan dio učenja i rađenja matematike te je isto tako ih treba ohrabrivati da svoje ideje predstavljaju na njima razumljiv način iako one možda nisu uobičajene (Martin, W. G. i sur., 2000).

Da bi se bilo koji od ovih zadataka riješio učenik mora prvo stvoriti **strategiju** za njegovo rješavanje, on uočavajući semantičku strukturu problemskog zadatka stvara vlastite strategije rješavanja kako bi došao do rješenja, odnosno primjenjuje svoje analitičke i intuitivne vještine

oblikovanja kako bi problemsku situaciju analizirao i dobio odgovor (Mulliganu i Mitchelmore, 1997 prema Rudić i Cindrić, 2012). ). Izvorno, strategije su se odnosile na aspekte razmišljanja u organiziranju ratova, pobjeđivanju u igrama ili održavanju kretanja poslovanja u željenom smjeru prema postavljenim idejama i ciljevima (Fülöp, 2015). Sada u nastavi matematike, strategije koje se koriste pri rješavanju problemskih zadataka predstavljaju prepoznatljive metode pristupanja zadatku i u potpunosti su neovisne o temi, a učenici ih odabiru ili dizajniraju kako razvijaju plan rješavanja (Van de Wale i sur., 2010). Rješavajući problem ona oblikuju strategije, testiraju ih i vrednuju, a sve kao bi došli do cilja (rješenja) i putem oblikovala nova znanja (Kolar, 2018).

Prilikom rješavanja matematičkih problema postoje dvije vrste donošenja odluka: „*što činiti*“ i „*kako činiti*“. Prva predstavlja određivanje cilja i strategije kojom će se do njega doći, a druga se odnosi na odlučivanje kako implementirati prethodno odabranu strategiju (Fülöp, 2015). Neke strategije koje se koriste pri rješavanju problemskih zadataka su:

***Pogađaj i testiraj-*** kao što i samo ime kaže ova strategija se koristi tako da se pogađa rješenje i provjerava je li ono točno, ako je neispravno pogađa se i provjerava ponovo

***Nacrtaj sliku-*** crtanje slike može pomoći razumijevanju problema tako da se može napraviti plan kako ga riješiti

***Koristi se jednadžbom-*** tekst/priča se preoblikuje u brojeve ili simbole kako bi se riješio problem, ovo je jedna od najkorisnijih strategija i često se koristi u algebri

***Uoč i uzorak-*** pronalaze se i ispisuju elementi u zadatku koji se ponavljaju te se provjerava postoji li uzorak među njima koji navodi na rješenje zadatka

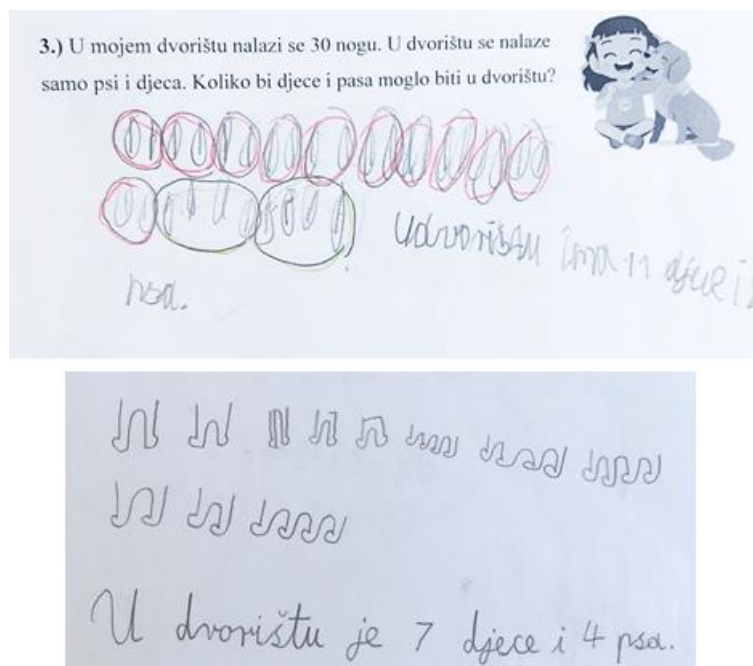
***Napravi listu-*** sustavno se ističu mogući ishodi situacije koji mogu ukazati na rješenje, često se kombinira sa strategijom „uoči uzorak“

***Riješi jednostavniji problem-*** elementi zadatka se pojednostavljaju ili preformuliraju kako bi ga se lakše razumjelo i analiziralo, a rješenje jednostavnijeg problema može pomoći u rješavanju glavnog

***Izradi tablicu ili grafikon-*** njihovim izrađivanjem se omogućuje lakši pregled nad podacima (Musser i sur., 2008 i Van de Wale i sur., 2010).

Nadalje djeca će s iskustvom razvijati i osjećaj kada koristiti jednu strategiju umjesto druge prepoznajući određene elemente zadatka, ali isto tako i uočavati da određeni problemi mogu biti riješeni uz pomoć više različitih strategija (Musser i sur., 2008).

U sljedećim primjerima će se moći vidjeti neke zanimljive strategije učenika prvog, drugog i trećeg razreda. Na slici 12 se vide različite strategije učenika za rješavanje istog zadatka. Učenik u prvom primjeru učenik prvo crta svih 30 crtica/nogu zatim znajući da djeca imaju po dvije, a psi po 4 noge zaokružuje parove koji predstavljaju noge djece i na kraju kada mu je ostalo još osam nogu zaokružuje dvije grupe po četiri koje predstavljaju noge pasa te dobiva rješenje od 11 djece i 2 psa. Kod drugog djeteta se vidi drugačija strategija ono prvo crta nekoliko pari dječjih nogu zatim nekoliko nogu pasa i kada vidi da mu nedostaje još do 30 nadocrtava još nogu djece i psa dok ne dolazi do konačne brojke od 30 nogu i rezultata da u dvorištu ima sedmero djece i četiri psa. Iako koriste različite strategije i dolaze do različitih rješenja oba djeteta su uspješno riješili zadatak jer je riješ o problemskom zadatku otvorenog tipa gdje do izražaja dolazi dječja kreativnost i logika.

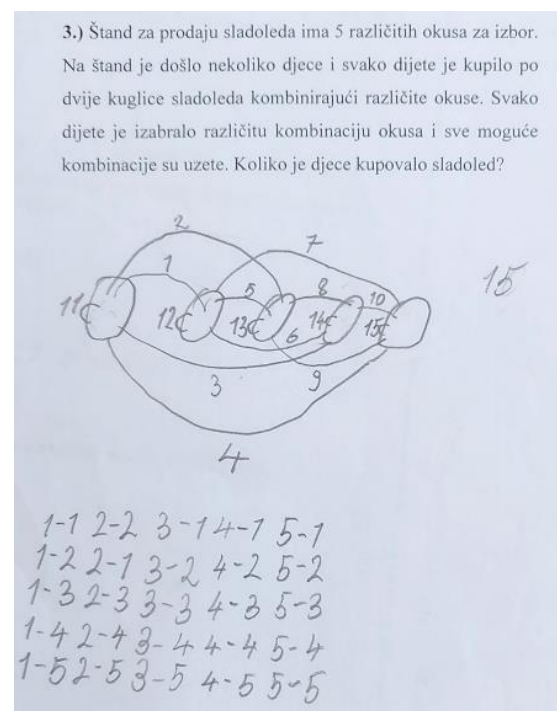
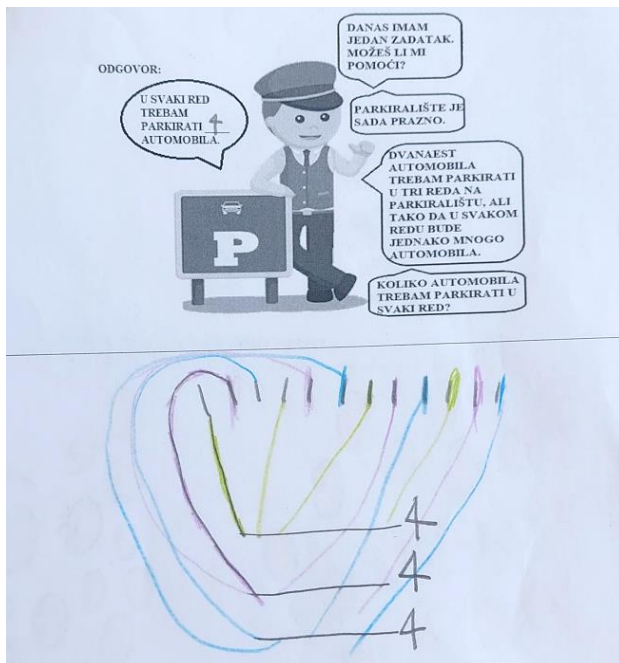


**Slika 12:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 2.r.



Na **slici 13** prikazana je zanimljiva strategija učenika prvog razreda koji je ne poznajući još koncept dijeljenja uspješno saznao koliko automobila treba biti u svakom redu. Učenik crta 12 crtica koje predstavljaju automobile zatim jedan po jedan automobil svrstava u svaki red, automobile koji idu u prvi red povezuje zelenom bojom, zatim automobile za drugi red roza i za treći red plavom bojom kako bi ih bolje razlikovao.

Sljedeća strategija prikazana je u radu učenika trećeg razreda (**slika 14**) koji kako bi saznao koliko djece je kupilo sladoled crta posudice različitih sladoleda i crtama povezuje sve kombinacije te ih brojačano ispod dopisuje to jest sparuje parove 1-1, 1-2, 1-3 ... da bi došao do konačnog rješenja od petnaestero djece



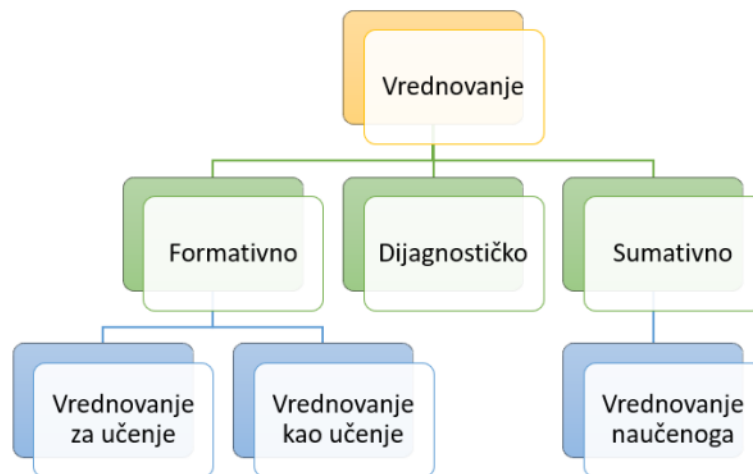
**Slika 13:** Primjer rješavanja trećeg zad. 1. r.

**Slika 14:** Primjer rješavanja trećeg zad. 3. r.

Primjera rješavanja problemskih zadataka može biti raznovrsnih pa tako i različitih strategija rješavanja, reprezentacija i modela, a ovisno vrsti problemskog zadatka i različitih rješenja. Prema tome dovodi se u pitanje kako učitelj sve ove značajke i posebnosti ove vrste zadataka treba vrednovati.

## 6) VREDNOVANJE U NASTAVI MATEMATIKE

Razina usvojenosti znanja koje učenici imaju procjenjuje se vrednovanjem te se ono nameće kao neizostavan dio procesa same nastave jer bez njega nije poznato kakve sposobnosti i u kojoj mjeri učenik ima te koliko znanja posjeduje (Tkalec i sur., 2015). Vrednovanje je kompleksan i složen postupak, a kako bi ga učitelj učinkovito ostvarivao treba si razviti dobar sustav praćenja, evidentiranja te provjeravanja učenika (Kadum-Bošnjak i Brajković, 2007). Svrha samog vrednovanja osim pružanja informacija o postignućima učenika jest i pružanje podrške napredovanju i učenju. Učenike se nastoji motivirati za učenje, roditelji dobivaju informacije o postignućima vlastite djece, a učiteljima služi kao smjernica za daljnje planiranje nastavnog procesa (Profil klett, 2019).



**Slika 15:** Shematski prikaz sustava vrednovanja

U djelatnosti odgoja i obrazovanja vrednovanje obuhvaća skup aktivnosti (praćenja, provjeravanja, ispitivanja, procjenjivanja, ocjenjivanja ...) kojima učitelj dolazi do informacija o tome koliko i kako se ostvaruju ciljevi djelatnosti (Mužić, 2005). Vrednovanje se s obzirom na svrhu dijeli na: **formativno** (odvija se u svim fazama nastavnog procesa), **dijagnostičko** (u većini slučajeva se provodi na početku godine u svrhu inicijalne provjere i na temelju njega učitelj planira svoje poučavanje i prilagođava nastavni proces) i **sumativno** (procjenjuju se rezultati učenja učenika i provodi se na kraju određenog razdoblja ili nakon završetka obrade nastavne cjeline) (Profil klett, 2019). Dio sumativnog vrednovanja jest vrednovanje naučenog i ono se provodi kada je prema procjeni učitelja potrebno izvijestiti i dokumentirati učenički napredak i postignuća, a najčešće se provodi nakon obrade neke nastavne cjeline i ono rezultira ocjenom.

Kao vrlo složenom dijelu procesa vrednovanja, ocjenjivanju se pridaje posebna pažnja jer se ono kao rezultat procesa vrednovanja koristi za bilježenje učeničke stečene razine sposobnosti te kao pokazatelj njegovog napredovanja u razumijevanju i primjenjivanju odgovarajućeg znanja u nekoj realnoj situaciji (Hercigonja, 2017).

Vrednovanje, u matematici kao nastavnom predmetu, sastavni je dio procesa učenja i poučavanja jer se kroz njega dobivaju obavijesti o učenikovim matematičkim vještinama i razini na kojoj su usvojena matematička znanja. Glavne sastavnice odnosno elementi vrednovanja su: *usvojenost znanja i vještina, matematička komunikacija i rješavanje problema.*

USVOJENOST ZNANJA I VJEŠTINA	MATEMATIČKA KOMUNIKACIJA	RJEŠAVANJE PROBLEMA
<ul style="list-style-type: none"> <li>• opisuje matematičke pojmove</li> <li>• odabire odgovarajuće i matematički ispravne procedure te ih provodi</li> <li>• provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rezultata</li> <li>• upotrebljava i povezuje matematičke koncepte.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• koristi se odgovarajućim matematičkim jezikom (standardni matematički simboli, zapisi i terminologija) pri usmenome i pisanome izražavanju</li> <li>• koristi se odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka</li> <li>• prelazi između različitih matematičkih prikaza</li> <li>• svoje razmišljanje iznosi cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama</li> <li>• postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenoga pitanja</li> <li>• organizira informacije u logičku strukturu</li> <li>• primjereno se koristi tehnologijom.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• prepoznaje relevantne elemente problema i naslućuje metode rješavanja</li> <li>• uspješno primjenjuje odabranu matematičku metodu pri rješavanju problema</li> <li>• modelira matematičkim zakonitostima problemske situacije uz raspravu</li> <li>• ispravno rješava probleme u različitim kontekstima</li> <li>• provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rješenja problema</li> <li>• generalizira rješenje.</li> </ul>

**Tablica 1:** Elementi vrednovanja u nastavi matematike

Navedeni elementi odražavaju same ciljeve predmeta te se vrednuju u postotcima koji su u prvih pet razreda u omjeru 40 : 30 : 30, a u sljedećim razredima 30: 30 : 40 (MZO, 2019). Iz čega se može vidjeti kako problemski zadaci i njihovo rješavanje igraju važnu ulogu u današnjoj nastavi matematike jer čine jedan od tri elementa vrednovanja.

Vrsta vrednovanja koja se koristi u suvremenim školama jest kriterijsko vrednovanje, odnosno njegovi posebni dijelovi rubrike. Kriterijsko vrednovanje nastoji promijeniti tradicionalni pristup vrednovanju tako što učenicima daje informacije o tome koji se elementi uzimaju u

obzir prilikom vrednovanja te im se tako pružaju informacije o tome što se od njih očekuje. Učenici dobivaju povratne informacije o razini vlastitog postignuća te mogu stvoriti realnu sliku svoga napredovanja (Jurjević Jovanović i sur., 2020).

Rubrike su skupovi usklađenih kriterija koje se sastoje od različitih razina ostvarenosti elemenata koji se vrednuju. Organiziraju se uglavnom u obliku tablica i u razrednoj nastavi pri vrednovanju naučenog se uglavnom prikazuju kroz četiri razine usvojenosti te se dijele se na *analitičke i holističke rubrike*.

### **Analitičke rubrike**

Analitičke rubrike su dvodimenzionalne rubrike koje se sastoje od *elemenata* koji se vrednuju zatim *razina ostvarenosti* elemenata koji se vrednuju te *opisivača* koji pojašnjavaju svaku pojedinu razinu (Jurjević Jovanović i sur., 2020).

Dolje prikazana analitička rubrika prikazuje jedan način vrednovanja problemskih zadataka, a njeni su glavne sastavnice elementi SOLO taksonomije i Polyine teorije o rješavanju problemskih zadataka. Odnosno elementi koji se vrednuju jesu koraci kroz koje se prema Polyi realizira rješavanje problemskog zadatka, a razina ostvarenosti jesu razine usvojenosti znanja prema SOLO taksonomiji.

SOLO taksonomiju (Structure of observed learning outcomes) razvili su John Biggs i Kevin Collins kako bi klasificirali kvalitetu znanja i razumijevanja učenika prema danom zadatku to jest oni su nastojali odrediti kriterije prema kojima učitelji određuju koji je učenički rad rezultat dubljeg, a koji tek površnog razumijevanja. Ova taksonomija se koristi kako bi se odredila razina razumijevanja koja se kreće od površnog znanja do dubokog razumijevanja zadatka te se dijeli na pet razina (Kaharuddin i Hajeniati, 2020). Pet razina od kojih se sastoji jesu: **Predstrukturalna razina-** učenik ne razumije zadatak ni o čemu se u njemu radi, informacije koje dobiva ne uspijeva povezati niti organizirati

**Razina jednostrukog povezivanja-** učenik uočava jedan aspekt zadatka, ali njegovo razumijevanje je ograničeno i nepovezano

**Razina multistrukturalnog razumijevanja-** učenik uočava više aspekata zadatka no nedostaje mu razumijevanje povezanosti među pojedinim aspektima

**Razina odnosa-** učenik povezuje pojedine aspekte zadatka u smislenu cjelinu te ga razumije u cijelosti

**Razina proširenja-** učenik na nov način gleda na problem, može predvidjeti što bi se dogodilo da se jedan aspekt zadatka promijeni te kako bi se koncept mogao primijeniti u nekim drugim područjima (Juričić, 2016).

Ono što razlikuje prva tri stupnja od zadnja dva jest kvaliteta razumijevanja jer se među njima događa samo kvantitativna promjena odnosno spoznaja više činjenica, elemenata zadatka ali koje ne rezultira dubljim razumijevanjem. Tek dolaskom na razinu odnosa učenik uočava poveznice i stvara smisao (Potter i Kustra, 2012). U ovoj tablici su uzete prve četiri razine taksonomije dok bi peta razina značila da učenik svoju strategiju pri rješavanju jednog problema može primijeniti i u drugim situacijama.

	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>Razumijevanje problema</b>	U potpunosti razumije zadatak. Samostalno ga interpretira.	Djelomično razumije zadatak. U interpretaciji zadatka izostavlja neke elemente.	Ne razumije zadatak. Krivo interpretira zadatak.	Ne razumije zadatak. Ne uspijeva interpretirati zadatak.
<b>Planiranje rješavanja</b>	Postavlja dobar plan koji će ga dovesti do točnog odgovora, ako se provede točno	Postavlja djelomično točan plan.	Postavljen plan neće dovesti do točnog odgovora.	Ne postavlja plan.
<b>Izvođenje plana</b>	Plan proveden dobro. A djelomično dobar plan nadopunjava tijekom rješavanja i provodi ga dobro.	Djelomično dobro provodi plan.	Ne slijedi planirano, već izvodi zadatak suprotno od planiranog.	Ne izvodi plan.
<b>Pogled unazad</b>	Daje točan odgovor. Interpretira odgovor u skladu s postavljenim problemom.	Daje djelomično točan odgovor ili netočan odgovor, ali interpretacijom s postavljenim problemom uočava nedostatak koji ispravlja.	Daje netočan odgovor i interpretacijom s postavljenim problemom uočava grešku, ali ne uspijeva ispraviti postupak ili pronaći grešku.	Daje netočan odgovor i ne zna interpretirati odgovor u skladu s početnim problemom.

**Tablica 2:** Analitička tablica vrednovanja problemskih zadataka

### Holističke rubrike

Holističke rubrike su jednodimenzionalne rubrike te sadrže najčešće tri do pet razina ostvarenosti dok se elementi koji se vrednuju opisuju kao cjelina i ona ne daje detaljnu analizu svakog elementa vrednovanja pa su učenicima nešto manje razumljive (Jurjević Jovanović i

sur., 2020). Ovakve holističke rubrike su dio kurikuluma nastave matematike te se njima opisuju ishodi pojedine nastavne cjeline. Kao što je vidljivo na primjeru za ishod MAT OŠ A.1.5. za svaku od četiri razine znanja (ostvarenosti ishoda) opisano je što se od učenika očekuje da na toj razini zna.

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA	RAZINE OSTVARENOSTI
<p><b>MAT OŠ A.1.5.</b></p> <p>Matematički rasuđuje te matematičkim jezikom prikazuje i rješava različite tipove zadataka.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Postavlja matematički problem (određuje što je poznato i nepoznato, predviđa/istražuje i odabire strategije, donosi zaključke i određuje moguća rješenja).</li> <li>• Koristi se stečenim spoznajama u rješavanju različitih tipova zadataka (računski zadatci, u tekstualnim zadatcima i problemskim situacijama iz svakodnevnoga života).</li> <li>• Odabire matematički zapis uspoređivanja brojeva ili računsku operaciju u tekstualnim zadatcima.</li> <li>• Smišlja zadatke u kojima se pojavljuju odnosi među brojevima ili potreba za zbrajanjem ili oduzimanjem.</li> </ul> <p>Prošireni sadržaj: složenije problemske situacije i mozgalice.</p>	<p><b>ZADOVOLJAVAJUĆA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Konkretima i pravilnim matematičkim zapisom prikazuje i rješava jednostavne brojeve izraze.</li> </ul> <p><b>DOBRA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Matematičkim jezikom na različite načine prikazuje i rješava jednostavne brojeve izraze na temelju kojih donosi zaključke u različitim okolnostima.</li> </ul> <p><b>VRLO DOBRA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Matematički rasuđuje te matematičkim jezikom na različite načine prikazuje brojeve izraze pomoću kojih dolazi do zaključaka i mogućih novih pretpostavki.</li> </ul> <p><b>IZNIMNA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Matematički rasuđuje te smišlja problemske situacije u kojima se pojavljuju odnosi među brojevima ili potreba za zbrajanjem ili oduzimanjem.</li> </ul>

**Slika 16:** *Holističke rubrike odgojno-obrazovnih ishoda*

Holističke rubrike se koriste također kako bi se jasnije i preciznije procijenili matematički procesi tijekom rješavanja problemskih zadataka, a najšire je primijenjena trodimenzionalno četverorazinska holistička rubrika čije su sastavnice matematičko i strateško znanje te obrazloženje, svaku od ovih sastavnica se pojedinačno vrednuje kroz četiri razine ostvarenosti.

**Matematičko znanje-** odnosi se na kombinaciju konceptualnih razumijevanja i proceduralne fluentnosti njegovo poznavanje principa i postupaka koji će ga odvesti prema pravom rješenju problemskog zadatka

**Strateško znanje-** sposobnost učenika da formulira matematički problem, može ga predstaviti i riješiti

**Obrazloženje-** dijete može argumentirano pojasniti svaki korak svoga procesa rješavanja problema (Kilpatrick i sur., 2001).

Uzimajući u obzir posebnost problemskih zadataka, njihovu karakteristiku da svaki učenik može iznaći svoju posebnu strategiju/postupak za rješavanje postavlja se pitanje kako učitelji trebaju vrednovati te zadatke jer na temelju navedenih posebnosti problemskih zadataka trebaju oblikovati odgovarajuće ocjene i učenicima dati povratnu informaciju o tome što dobro čine i na čemu trebaju poraditi.

## **7) METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA**

### **7.1.) Cilj i problemi istraživanja**

Cilj prvog dijela istraživanja bio je istražiti kako učenici rješavaju različite problemske matematičke zadatke, koriste li se modeliranjem konkretima ili matematičkim modeliranjem pri njihovu rješavanju te kakva im je uspješnost rješavanja problemskih zadataka. Dok je cilj drugog dijela istraživanja bio ispitati kako učitelji gledaju na problemske zadatke, na koji način i kako te iste zadatke vrednuju to jest čime se vode prilikom vrednovanja uspješnosti rješavanja nekog problemskog zadatka.

Problemi ovog istraživanja su:

- ◇ ispitati kako učenici razredne nastave rješavaju problemske zadatke, koliko su uspješni u njihovu rješavanju i kojim metodama se koriste da bi došli do rješenja
- ◇ ispitati stav učitelja razredne nastave o problemskim zadacima
- ◇ ustanoviti načine vrednovanja problemskih zadataka i čime se učitelji vode prilikom vrednovanja uspješnosti rješavanja nekog problemskog zadatka

### **7.2.) Mjerni instrument i uzorak ispitanika**

Za prvi dio istraživanja kao mjerni instrument su se koristili ispiti s problemskim zadacima. Svaki ispit sadržavao je tri problemska zadatka i bio prilagođen razredu u kojem se djeca nalaze (primjeri ispita se nalaze u prilogima). Drugi dio istraživanja proveden je kroz individualni polustrukturirani intervju, s učiteljicama razredne nastave, koji se sastojao od devet pitanja otvorenog tipa kojima su se nastojali ispitati stavovi učiteljica prema problemskim zadacima, koriste li ih u nastavi, koje vrste i najvažnije kako ih vrednuju. U provedenom prvom dijelu istraživanja sudjelovalo je sedamdeset učenika razredne nastave u dobi od 7 do 10 godina i to 15 učenika prvog, 18 učenika drugog, 19 učenika trećeg i 18 učenika četvrtog razreda, a svi ispitanici su učenici iz OŠ Zadarski otoci.

Pri provedbi drugog dijela istraživanja sudjelovalo je dvanaest učiteljica razredne nastave u dobi od 39 do 60 godina koje u prosjeku imaju 25 godina radnog staža. Većina učiteljica, njih osam, je zaposlena u školama u Zadarskoj županiji, zatim jedna u Šibensko-kninskoj i tri učiteljice u Splitsko dalmatinskoj županiji. Sve ispitanice kao stupanj obrazovanja navode visoku stručnu spremu od kojih dvije imaju završen dvogodišnji stručni studij, a ostale imaju i

dvije godine dodatnog školovanja odnosno četiri godine studiranja. Većina ispitanica je prema zvanju učitelj razredne nastave, njih deset dok su dvije u zvanju učitelj-savjetnik.

### **7.3.) Postupak**

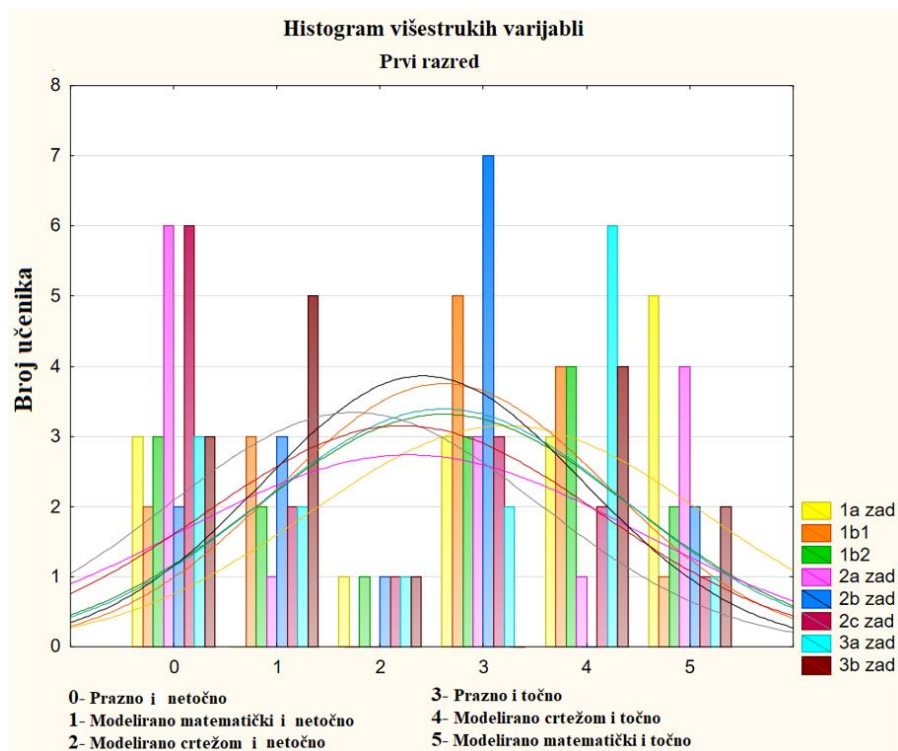
Prvi dio istraživanja proveo se 12. svibnja 2022. godine, a do ispitanika se došlo preko poznanstava sa stručne prakse. Na početku sata djeci su podijeljeni ispiti i rečeno im je da pokušaju riješiti zadatke tako da sami razmisle i riješe kako oni misle da bi se taj zadatak mogao riješiti i dobiti točan odgovor. To jest učenici su mogli crtati, pisati, računati koristiti metode koje im se čine ispravne da bi riješili zadatke. Svaki razred rješavao je ispit sastavljen od 3 pitanja različite vrste i težine jedan školski sat (45 minuta).

Kroz drugu polovicu lipanja 2023. godine provodio se drugi dio istraživanja tj. polustrukturirani intervjui s učiteljicama razredne nastave koji je u prosjeku trajao oko 45 minuta. Intervju se sastojao od tri dijela, u prvom dijelu su učiteljicama postavljena pitanja vezano za njihove stavove o problemskim zadacima, koriste li ih u nastavi, koje vrste i slično. Zatim su im u drugom dijelu pokazani primjeri ispita za sva četiri razreda kako bi odredile jesu li dani zadaci po njihovom mišljenju problemski ili ne, a naposljetku su im dani primjeri riješenih zadataka gdje su trebale usporediti načine rješavanja učenika i iznijeti svoje kriterije i načine vrednovanja. Razgovor sa svakom učiteljicom tijekom intervjua je sniman diktafonom, na što je svaka od njih pristala, i na kraju je svaki razgovor pretipkan odnosno izrađen je transkript. Nakon što su potrebni podaci prikupljeni provedena je kvalitativna obrada podataka slijedom čega se tematskom analizom za prvi dio intervjua napravila podjela po glavnim temama koje su prikazane u rezultatima istraživanja, a naposljetku na temelju dobivenih podataka izvedeni zaključci istraživanja.



## 8) REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Rezultati prvog dijela istraživanja s djecom obraditi će se statistički po razredu i zadacima te prikazati u obliku histograma koje će se dodatno interpretirati. Rezultati će se obraditi ovisno o (ne) točnosti i načinu rješavanja zadataka odnosno jesu li učenici u zadatku modelirali koristeći konkretne ili su čisto matematički modelirali.



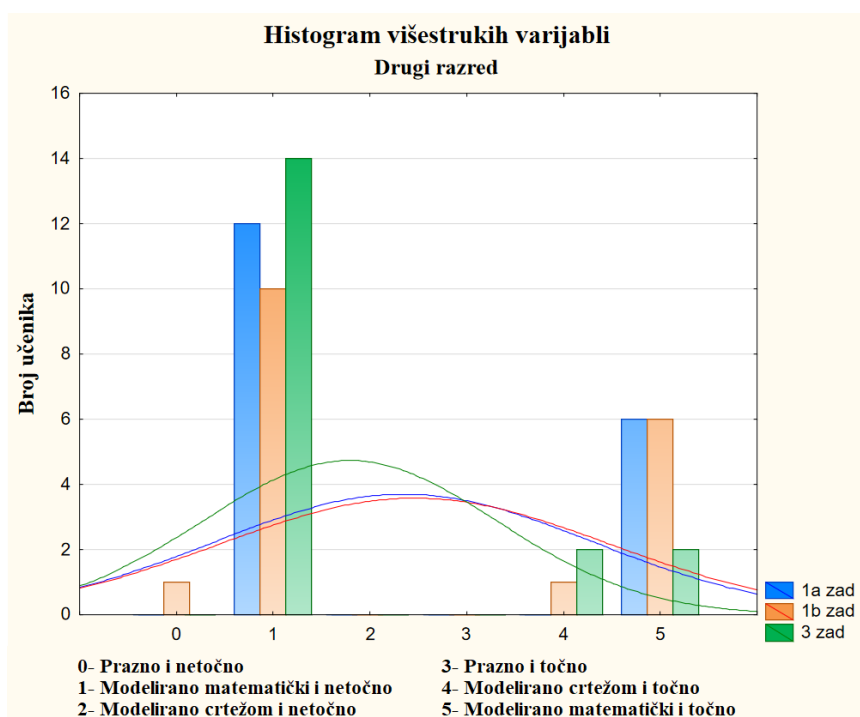
Slika 17: Dijagram riješenosti zadataka u prvom razredu<sup>1</sup>

Ovaj dijagram prikazuje riješenost zadataka u prvom razredu koje je rješavalo petnaest učenika. Iz dijagrama se može iščitati kako su učenici rješavali zadatke i jesu li ih točno riješili. Većina učenika prvi zadatak je točno riješila i to njih 66, 6 %, najviše učenika njih 6 se u prvom dijelu nije koristilo niti jednom vrstom modeliranja pri rješavanju zadatka, dok se 5 koristilo matematičkim i 4 modeliranjem konkretima. Drugi dio zadatka koji je podijeljen u dva dijela većina učenika rješavala je također ne koristeći modeliranje, od učenika koji su koristili modeliranje podjednak broj učenika, po njih četvero je u prvom dijelu koristilo matematičko i modeliranje konkretima dok je u drugom dijelu jedan učenik više koristio modeliranje konkretima. Drugi zadatak 51% učenika riješilo je točno, a najviše ih se kao i u prvom zadatku nije koristilo niti jednom vrstom modeliranja, po 9 učenika za svaki dio zadatka dok je po 5 učenika prva dva dijela zadatka rješavalo matematičkim i po 1 učenik modeliranjem

<sup>1</sup> Primjer zadataka za prvi razred nalazi se u *Primjeru 1*

konkretima, a u zadnjem dijelu su po 3 učenika koristila oba modeliranja. Posljednji, treći zadatak cjelokupno gledano pola učenika je riješilo točno i pola netočno no gledajući svaki dio zadatka posebno, prvi dio točno je riješilo 60%, a drugi 40% učenika. Pri rješavanju ovog zadatka učenici su se većinski (40%) koristili modeliranjem konkretima i uglavnom bili uspješni u rješavanju zadatka dok su učenici koji su koristili s druge dvije metode rješavanja bili nešto manje uspješni. Nadalje može se zaključiti kako su učenici prvog razreda uglavnom bili uspješni u rješavanju zadataka i da se najčešće nisu koristili niti jednom metodom modeliranja osim u trećem zadatku gdje je prevladavalo modeliranje konkretima.

Za drugi razred napravljena su dva dijagrama jer su se 1. i 3. zadatak vrednovali na drugačiji način od 2. zadatka iz razlog što je drugi zadatak zbog svoje prirode rješavan isključivo metodom matematičkog modeliranja pa se u prikazu nalazi samo (ne)točnost rješavanja.

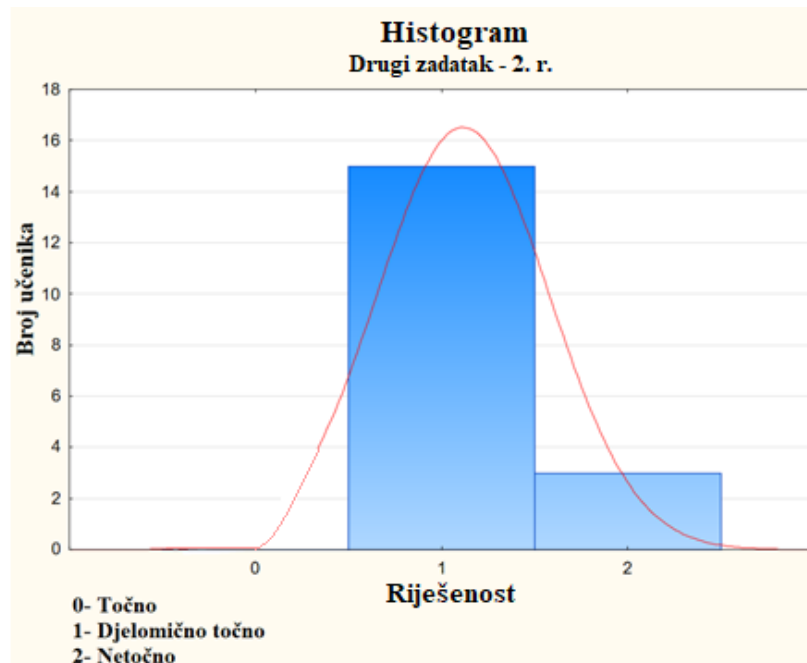


**Slika 18:** Dijagram riješenosti zadataka u drugom razredu <sup>2</sup>

Prvi dio prvog zadatka u drugom razredu rješavan je samo metodom matematičkog modeliranja dok se u drugom dijelu po jedan učenik koristio modeliranjem crtežom (konkretima) i rješavanjem bez modeliranja. Većina učenika u oba dijela zadatka nije bila uspješna u rješavanju pa je tako prvi dio zadatka točno riješilo samo 33,3%, a drugi dio nešto malo više 38,8% učenika. Što se tiče uspješnosti rješavanja u trećem zadatku ona je još manja nego u

<sup>2</sup> Primjer zadataka za drugi razred nalazi se u *Primjeru 2*

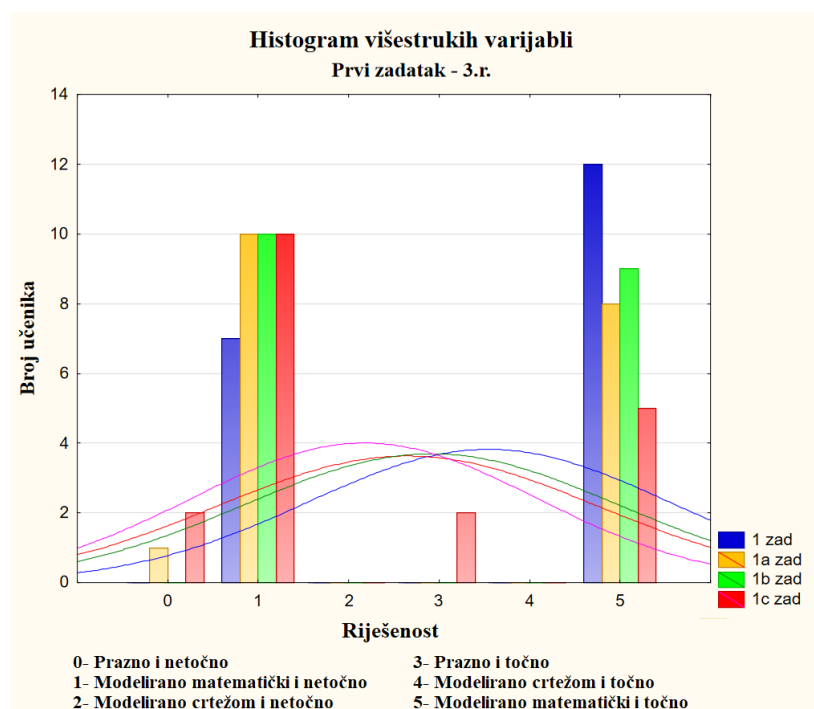
prvom zadatku, oko 22% . Ona je takva jer su samo četiri učenika uspjela točno riješiti zadatak tako što su po dva učenika rješavala metodom modeliranja konkretima i matematičkog modeliranja dok je ostatak učenika njih 14 koristeći se metodom matematičkog modeliranja netočno riješila zadatak. Za zaključiti je da je uspješnost točnog rješavanja ova dva zadatka bila vrlo niska i da se kao najčešća metoda rješavanja u oba zadatka istaknula metoda matematičkog modeliranja.



**Slika 19:** Dijagram riješenosti 2. zadatka u drugom razredu

Iz dijagrama za drugi zadatak može se iščitati kako nitko nije ovaj zadatak u potpunosti točno riješio, većina učenika njih 15 zadatak je djelomično točno riješilo dok ih je troje netočno riješilo zadatak. U zadatku se prema broju računskih radnji koje je trebalo izvršiti moglo ostvariti 7 bodova (što nitko nije ostvario) pa je tako 15 učenika prema riješenosti dobilo djelomične bodove. Najviše učenika, njih četvero, ostvarilo je po 2 boda, po tri učenika su ostvarila 1, 3 i 4 boda, a dva učenika su ostvarila 5 bodova što je ujedno i najviše ostvarenih bodova. Tri učenika nisu ostvarila niti jedan bod to jest u potpunosti netočno su riješili zadatak, a kao što je već navedeno metoda rješavanja u ovom zadatku bila je isključivo metoda matematičkog modeliranja.

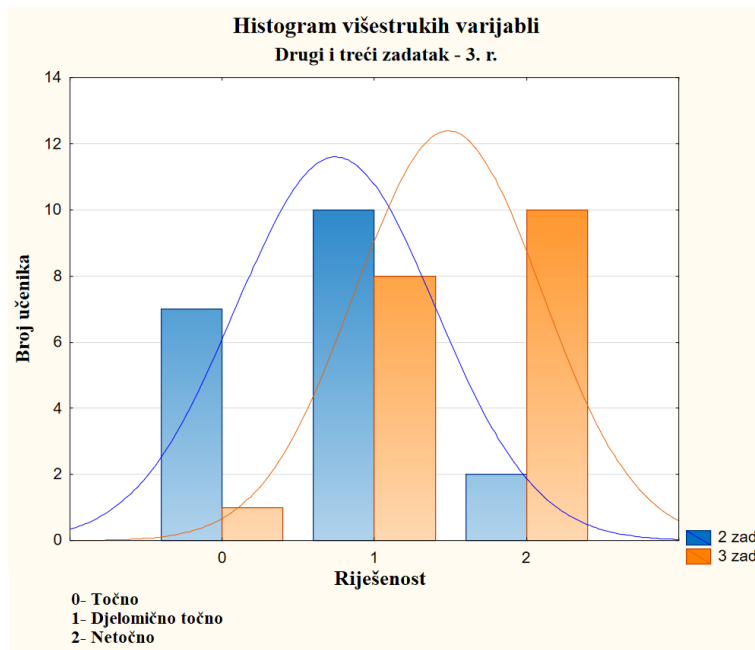
Za treći razred također su izrađena dva dijagrama i to prvi koji prikazuje riješenost 1. zadatka i drugi dijagram koji prikazuje riješenost 2. i 3. zadatka. Razlog zašto se u trećem razredu 3. zadatak vrednuje na isti način kao i 2. leži u prirodi samog zadatka to jest on je nešto kompleksniji i ima više elemenata/koraka rješavanja pa su neki učenici imali dobre strategije za rješavanje koje nisu uspjeli do kraja izvršiti, ali su ga ipak djelomično riješili stoga se to željelo prikazati. Zatim svi učenici koji su se koristili metodom modeliranja konkretima su točno ili djelomično točno riješili zadatak dok su ostali učenici koji su se koristili matematičkim modeliranjem (6 učenika) i oni koji nisu koristili niti jednu vrstu modeliranja (4 učenika) zadatak netočno riješili.



**Slika 20:** Dijagram riješenosti 1. zadatka u trećem razredu<sup>3</sup>

Cjelokupno gledano prvi zadatak trećeg razreda točno je riješen u manje od pola slučajeva odnosno bilo je 47,3 % točnih odgovora. Iznimka u točnosti rješavanja je prvi dio zadatka kojeg je točno riješilo 63% učenika dok su ostali dijelovi zadatka većinski netočno riješeni. U 93,4% slučajeva učenici su se koristili matematičkim modeliranjem dok se ostatak nije koristio niti jednom vrstom modeliranja.

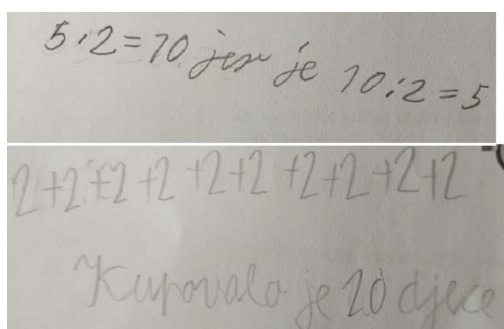
<sup>3</sup> Primjer zadatka za treći razred nalazi se u *Primjeru 3*



**Slika 21:** Dijagram riješenosti 2. i 3. zadatka u trećem razredu

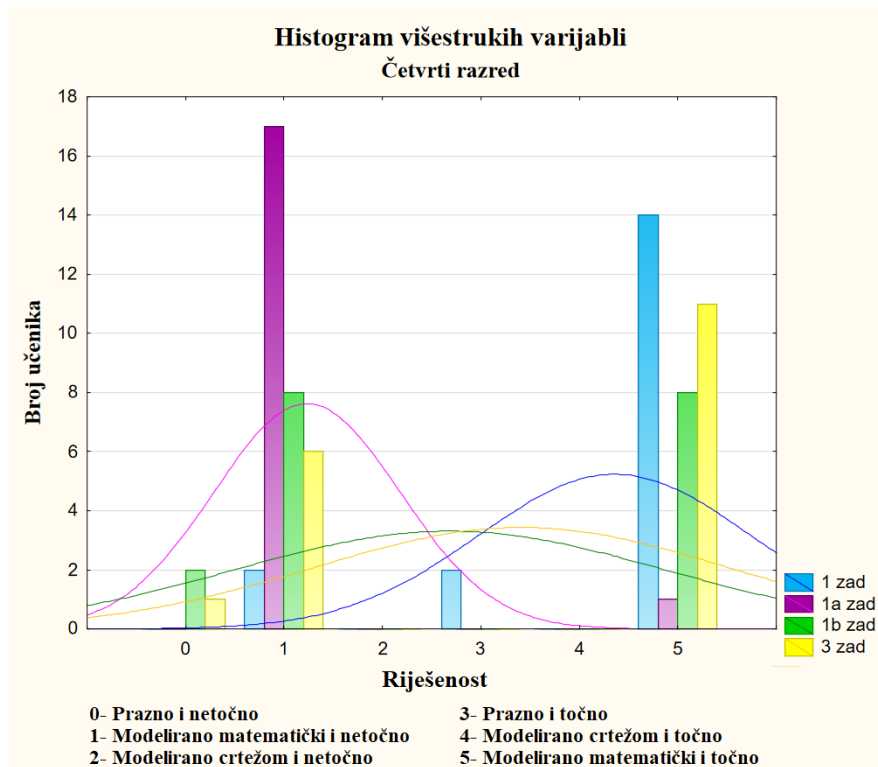
Za razliku od učenika u drugom razredu, u trećem razredu su učenici bili znatno uspješniji pri rješavanju ovog tipa zadatka s redosljedom računskih radnji, samo je 10,5% učenika netočno riješilo zadatak dok je ostatak učenika zadatak riješilo točno ( 36,8% ) ili djelomično točno (52,6%). Dakle sedam učenika je ostvarilo potpune bodove (5 bodova), jedan učenik je ostvario 4 boda, dva učenika 3 boda, četiri učenika 2 i tri učenika 1 bod dok dva učenika nisu dobila niti jedan bod. Bodovi su se kao i u drugom razredu dijelili prema broju točno izvršenih računskih radnji u zadatku.

Treći zadatak u potpunosti točno riješio je samo jedan učenik dok ih je osam riješilo djelomično točno i deset u potpunosti netočno. Svi učenici koji su točno ili djelomično točno riješili zadatak modelirali su crtežom, a učenici koji su modelirali matematički ili rješavali bez modeliranja netočno. Metode rješavanja zadataka crtežom možemo vidjeti na slikama 11 i 14 dok je ovdje prikazan primjer matematičkog modeliranja u kojem se vidi kako učenici nemaju pravu strategiju kako da dođu do rješenja i da nisu u potpunosti razumjeli zadatak.



**Slika 22:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 3.r

Riješenosti zadataka u četvrtom razredu prikazana je na isti način i zbog istih razloga kao u 2. razredu kroz dva grafa.

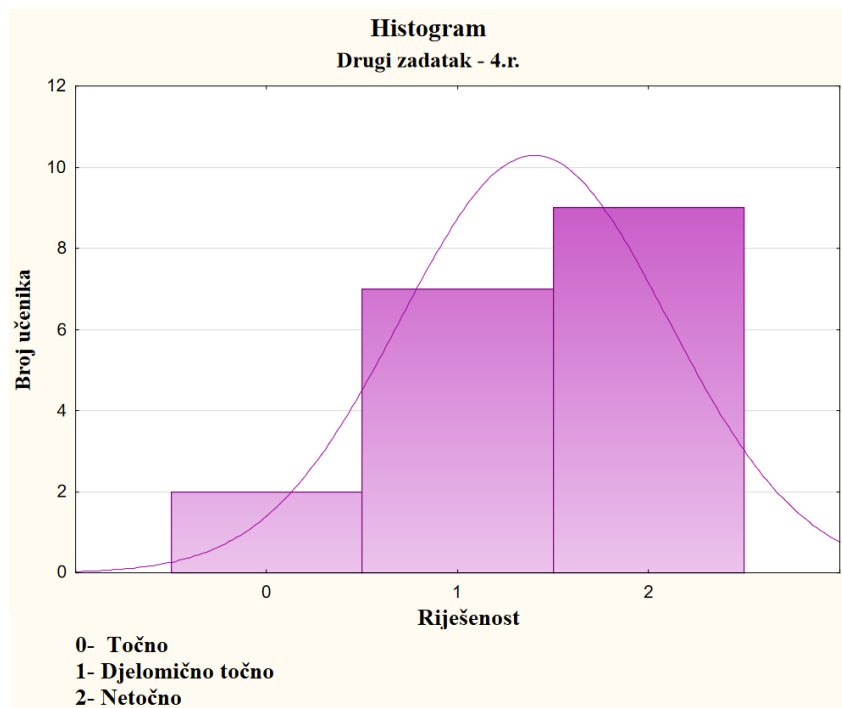


**Slika 23:** Dijagram riješenosti zadataka u četvrtom razredu<sup>4</sup>

Ovaj dijagram prikazuje riješenost 1. i 3. zadatka u četvrtom razredu. Prvi zadatak podijeljen je u tri dijela od kojih je najbolje riješen prvi dio s čak 88,8% riješenosti dok su druga dva dijela većinski netočno riješena, drugi ima samo 5,5 %, a treći dio 44,4% riješenosti. Pri rješavanju zadatka 90,7% učenika koristilo se matematičkim modeliranjem dok ostatak nije koristio niti jednu vrstu modeliranja.

U trećem zadatku također kao metoda rješavanja prevladava matematičko modeliranje, 94,4% posto učenika zadatak je rješavalo ovim načinom, dok se jedan učenik nije koristio niti jednom vrstom modeliranja pri rješavanju zadatka, a točno ga je riješilo 11 učenika odnosno 61,1% ispitanika.

<sup>4</sup> Primjer zadataka za četvrti razred nalazi se u *Primjeru 4*



**Slika 24:** Dijagram riješenosti 2. zadatka u četvrtom razredu

Drugi zadatak jedna polovina učenika riješila je netočno odnosno nije dobila niti jedan bod, samo dva učenika su potpuno točno riješila zadatak i dobila po 5 bodova, dok su po tri učenika dobila 1 i 3 boda, a jedan učenik je dobio 2 boda. Od učenika koji nisu dobili nikakve bodove dva su pokušala riješiti zadatak, a sedam ih je papir ostavilo prazan i ne pokušavajući ga riješiti. Dolje je prikazan primjer rješavanja 2. zadatka učenika broj 3 koji je dobio 1 bod .

$$(412857 : 9 - 3 \cdot 12582) + (346907 : 47) = 45865 - 37746 = 8119 + 6449 = 69592$$

**Slika 25:** Primjer rješavanja drugog zadatka 4.r.

Na kraju ovog dijela istraživanja zaključiti se može kako djeca u 1. razredu više modeliraju konkretima, dok kasnije u rješavanju prevladava matematičko modeliranje što zbog njihovog dubljeg ulaska u matematiku jer kreću više matematički razmišljati i zbog same prirode

zadataka koji uključuju velike brojeve. Prvi zadaci su uključivali zadatke riječima s više koraka rješavanja gdje su djeca većinski dobro rješavala prvi dio zadatka dok su na sljedećim koracima činila greške, a iznimka je bio 2. razred koji je loše riješio većinu ispita. Drugi zadatak u prvom razredu bio je zadatak s novcem kojeg su djeca riješila s 51% učinkovitosti dok su u ostalim razredima drugi zadaci bili zadaci redosljeda računskih radnji s kojima su učenici imali najviše problema. Naposljetku u trećim zadacima se tražilo od učenika da malo više upotrijebe logiku i kombinatoriku i u njima su učenici dosta koristili modeliranje konkretima što bi ih uglavnom dovelo do točnog ili djelomično točnog rješenja dok upotreba matematičkog modeliranja u ovim zadacima nije učenicima mnogo koristila osim u 4. razredu gdje je matematičko modeliranje korišteno u 94% slučajeva.

Što o svemu ovome misle učiteljice, zašto smatraju da su djeca loše rješavala zadatke riječima, kako gledaju na lošu riješenost drugog zadatka u razredima, što misle o idejama za rješavanje trećih zadataka kroz razrede i kako bi one sve to vrednovale saznati će se u drugom dijelu istraživanja.

Drugi dio istraživanja koji je proveden s učiteljicama kroz polustrukturirane intervjuje biti će opisan deskriptivnom metodom i podijeljen u tri djela kako je i sam intervju bio konstruiran. U prvom dijelu će se iznijeti stavovi učiteljica o problemskim zadacima, koriste li ih, koje vrste i slično, zatim stavovi prema zadacima koji su dani učenicima na rješavanje to jest smatraju li ih one problemskim ili ne. Naposljetku će se iznijeti podaci o tome na koji način one vrednuju problemske zadatke odnosno kako bi one vrednovale dane, od učenika riješene, zadatke.

S obzirom na odgovore učiteljica na postavljena pitanja u prvom djelu intervjuja rezultati tog dijela istraživanja će biti prikazani prema sljedećim temama:

◇ *Problemski zadaci i njihovo korištenje u nastavi matematike*

◇ *Vrste i primjeri problemskih zadataka*

◇ *Dijelovi sata u kojima se koriste problemski zadaci*

◇ *Postupak rada kada nitko ne zna riješiti zadatak*

◇ *Namijenjenost problemskih zadataka*



## **Problemski zadaci i njihovo korištenje u nastavi matematike**

U dosadašnjem tekstu o problemskim zadacima se pisalo prema riječima znanstvenika koji se bave matematikom i problemskim zadacima unutar nje pa se dobio zaključak kako se na njih gleda kao na zadatke koje djeca samostalno rješavaju i nemaju unaprijed postavljen postupak njihova rješavanja već sami pronalaze put do rješenja. Uzimajući u obzir da su sve ispitanice izjavile da koriste problemske zadatke u svojoj nastavi željelo se doznati što one kao osobe koje te zadatke učenicima zadaju i koje su u izravnom kontaktu s učenicima pri rješavanju istih, misle o njima.

Najčešće se kroz njihove odgovore prožimaju pojmovi logički zadaci i zadaci riječima. Odnosno četiri učiteljice izjavljuju da su za njih problemski zadaci, zadaci riječima dok jedna nadodaje da su to zadaci riječima, ali koji imaju više koraka rješavanja. Podjednak broj učiteljica pod problemske zadatke smatra one zadatke u kojima trebaju koristiti matematičku logiku:

*„Za mene je problemski zadatak, zadatak koji potiče učenika na logičko razmišljanje, kada učeniku nije sve servirano nego zamotano u riječima.“ (UČ1)*

*„Problemski zadaci su logički zadaci gdje djeca trebaju razmišljati, a može ih se osmisliti u bilo kojoj domeni matematike.“ (UČ5)*

*„To su zadaci u kojima djeca razmišljaju i logički povezuju sadržaje matematike sa svojom okolinom odnosno primjerima iz svoje okoline.“ (UČ3)*

Povezanost zadataka s okolinom ističe još jedna učiteljica koja kaže da su to zadaci „čiji je problem vezan za svakodnevni život“ (UČ 9), a UČ 8 ističe samostalnost kao bitnu stavku koja čini problemske zadatke problemskima.

## **Vrste i primjeri problemskih zadataka**

Kada je riječ o vrstama problemskih zadataka koje koriste sve učiteljice navode zadatke riječima kao najčešću vrstu. No nisu oni jedina vrsta problemskih zadataka koja se prožima kroz njihovu nastavu. Tako učiteljica 2 navodi kako ona svojim učenicima osim zadataka riječima daje i različite mozgalice i sudoku, a učiteljica 5 ima zanimljiv primjer lektirnih matematičkih problemskih zadataka za koje kaže kako ih učenici vrlo rado rješavaju. Naime uzimajući likove i situacije iz lektire koju djeca u tom periodu rade smišlja problemske zadatke

kako bi ih približila djeci i učinila ih zanimljivijima. Također učiteljice navode i zadatke s nepoznanicama, zagrada te učiteljica 12 ističe slikovne i zadatke s grafikonima iz kojih djeca trebaju iščitati podatke i zatim riješiti zadatak.

Učiteljica	Primjer zadatka
Učiteljica 1	<i>Maja je uštedjela 64 kn, a cijeli 3.a uštedio je 8 puta više od Maje. Koliko je uštedio 3.a? Na izletu je 3. a na sladoled potrošio četvrtinu novca. Koliko im ga je ostalo?</i>
Učiteljica 3	<i>Pužić mužić žurio je na romantični sastanak žureći se prvi sat je prešao 345 cm, a drugi sat 412 centimetara. Srećom stigao je na vrijeme. Kolika je udaljenost bila koju je pužić trebao prijeći?</i>
Učiteljica 4	<i>Luka je uštedio 312 kn, trećinu iznosa potrošit će na kupovinu društvene igre, a polovinu preostalog iznosa na knjigu. Koliko novca će mu ostati nakon te dvije kupovine?</i>
Učiteljica 5	<i>Opseg vrata mlina kojeg su djeca uređivala je 800 cm, a širina 150 cm. Odredi visinu tih vrata. Djeca imaju drveni čabar vode i s njime su izvukli 9450 dl vode iz bunara, u čabar im stane 9 l vode. Koliko čabara vode su izvukli?</i>
Učiteljica 10	<i>Zrakoplov je za 2 sata preletio 652 kilometra. Koliko je preletio za 3 sata ako je i dalje letio istom brzinom?</i>

**Tablica 3:** Primjeri problemskih zadataka

Iako učiteljice navode kako koriste različite vrste problemskih zadataka kroz svoju nastavu iz primjera koje su dali za problemske zadatke može se vidjeti kako su problemski zadaci riječima najzastupljeniji.

Na pitanje kako odabiru problemske zadatke učiteljice odgovaraju kako ih odabiru ovisno o grupi učenika s kojom rade to jest ako imaju slabiju grupu učenika da onda biraju nešto jednostavnije problemske zadatke i obratno. *Zadatke biram prema skupini djece s kojom radim, koliko djece bi bilo sposobno riješiti neki zadatak pa prema tome i težinu problemskog zadatka koji mogu biti jednostavniji, ali i složeniji.* (UČ 12)

Zadatke kažu najčešće pronalaze u zbirkama zadataka, literaturi za dodatnu nastavu i na internetu, ali ih često smišljati i same. *Odabirem iz različitih knjiga, zbirki, radnih bilježnica i interneta. Ponekad i kolegice međusobno dijele zadatke, a radila sam i s malim matematičarima pa imam i materijala iz tog.* (UČ 2)

*Odabirem iz neposredne stvarnosti, ono što okružuje učenike, što je u njihovoj okolini. (UČ 1)*

### **Dijelovi sata u kojima se koriste problemski zadaci**

Dio sata u kojem se učiteljice koriste problemskim zadacima u nastavi matematike govore o tome kako one gledaju na njih i na njihovu svrhu. Odnosno koriste li ih na početku sata da motiviraju učenike ili ih koriste na kraju sata da uvježbaju već naučene sadržaje kroz nešto kompleksnije, zahtjevnije zadatke.

Šest učiteljica izjavilo je kako problemske zadatke koriste u oba dijela sata, njih pet kako uglavnom koriste u uvježbavanju i ponavljanju, a jedna učiteljica je rekla da više voli koristiti problemske zadatke u uvodu. No niti jedna učiteljica ne isključuje korištenje zadataka i u drugom dijelu, samo navode kada više vole koristiti.

*Problemske zadatke uglavnom koristim u uvježbavanju i ponavljanju. Rijetko kada ih koristim u uvodu jer želim da bude laganiji i da ih uvedem u nastavnu priču kroz neku igru. (UČ 2)*

*Problemske zadatke najčešće koristim u uvježbavanju i ponavljanju. Mogu biti i u uvodu, ali ako ih djeca ne mogu riješiti onda im padne motivacija, ne vole da im je nešto nejasno jer vole princip od jednostavnijeg ka složenijem. U uvodnom dijelu može biti neka motivacijska priča vezana uz vrijeme godine ili neki zadaci za ponavljanje da steknu sigurnost i onda prelazimo na složenije odnosno problemske zadatke. (UČ 12)*

### **Postupak rada kada nitko ne zna riješiti zadatak**

Na pitanje kako postupaju kada nitko u razredu ne zna riješiti problemski zadatak učiteljice odgovaraju s velikom sličnošću. Većina učiteljica, njih 10 kao postupak rada ističe zajednički rad na ploči s djecom.

*Jednog učenika izvedem pred ploču, on pročita zadatak, napiše što mu je poznato na ploči, prepriča zadatak. Zatim aga pitam kojom računskom radnjom bi zadatak mogli riješiti, ima li on kakvu ideju. Potom učenik razmišlja što mu je poznato, a što nepoznato koju radnju treba raditi te riješi problem. Djecu na početku 1.r. učim faze rješavanja zadataka: prepričati svojim riječima, vidjeti što je poznato/nepoznato, odrediti računsku radnju i odgovoriti punom rečenicom. Obično u ovakvoj situaciji izvedem učenike kojima lošije ide. (UČ 1)*

Druge dvije učiteljice imaju drugačiji pristup. Učiteljica br. 3 govori kako ona nastoji djeci ako nitko ne razumije zadatak pojednostaviti dok učiteljica br. 6 učenicima naglasi ključne riječi.

*Pročitam im još jednom zadatak, naglasim ključne riječi (uvećati, smanjiti, toliko puta), nakon toga pohvataju. (UČ 3)*

Ako se uzme u obzir definicija problemskog zadatka da ga djeca samostalno bez pomoći učitelja rješavaju i sami iznašaju rješenje onda se može reći da se problemnost tog zadatka čak i gubi kada ga se zajedno rješava na ploči. Dok se prema literaturi kao najbolji pristup kada nitko ne zna riješiti zadatak uzima pojednostavljivanje problemskog zadatka što ovdje vidimo da je navela sam jedna učiteljica.

### **Namijenjenost problemskih zadataka**

Posljednje pitanje za učiteljice u prvom dijelu intervjua bilo je smatraju li one da su problemski zadaci u nastavi matematike za sve učenike ili samo za one bolje/ uspješnije. Sedam učiteljica izjavilo je kako smatra da su problemski zadaci za sve učenike.

*Mislim da su za sve učenike jer kroz njih ona djeca koja se boje takvih zadataka prevladavaju strah i uče se razmišljati, logički zaključivati. Oni su kao neka zagonetka koju učenik istraživačkim pristupom rješava. (UČ 1)*

*Oni su za svu djecu jer su sjajna priprema i dobro koreliraju sa stvarnošću i daju svrhovitost nastavi matematike. ( UČ 8)*

Jedna od učiteljica kaže: *Smatram da treba zadati svim učenicima, ali iskustvo pokazuje da ne mogu svi riješiti (UČ 5)* dok druga učiteljica ima lijep primjer iz prakse koji pokazuje kako i učenici koji idu po posebnom programu mogu rješavati ove zadatke: *Ne smatram da su samo za napredne. Imala sam dječaka koji je išao po posebnom programu, a ovakve zadatke je rješavao jer u mu životni i pristupačniji zato mislim da su poticaj i za slabije učenike. (UČ 6)*

Od ostalih učiteljica, tri problemske zadatke dijele na jednostavnije i složenije pa kažu da one složenije mogu samo uspješniji dok jednostavnije mogu svi rješavati. *Smatram da su za sve učenike samo ne jednako teški, jer meni učenik koji ide po posebnom programu zbog sniženih intelektualnih sposobnosti zna riješiti neke jednostavnije problemske zadatke riječima i zadatke sa zagradama samo mu ih treba pročitati dok one s nepoznanicama teže, njih ne može. Primijetila sam da slabiji učenici kada im se pročita zadatak naglas puno bolje shvate zadatak nego kada sami čitaju. (UČ 11)*

Preostale dvije učiteljice smatraju kako su ovi zadaci samo za uspješnije učenike: *Ne mogu biti svi za sve, to je nemoguće. Mislim da su za uspješnije, nemaju svi matematičke sposobnosti jednako razvijene, neki uopće nemaju, ne povezuju nego rade na principu neke sheme, neke formule bez ikakve logike samo primjenjuju ono što je izdrilano. Ja sada imam samo jednog učenika koji povezuje zašto je nešto tako od njih devetnaest samo on jedan.* (UČ 2)

Svaka učiteljica zbog nekih svojih razloga stečenih kroz dugogodišnju praksu iznosi ove stavove, no ipak je pozitivno što na kraju možemo zaključiti kako većina učiteljica smatra kako su problemski zadaci za sve učenike i da oni mogu doprinijeti učenikovu shvaćanju i produbljivanju znanja iz matematike.

Zadatak sljedećeg dijela istraživanja bio je saznati što učiteljice misle o zadacima koji su dani učenicima, odnosno smatraju li one da su dani zadaci problemski ili ne. U tablici ispod se nalaze podaci o odgovorima svih učiteljica za svaki zadatak svakog razreda.

DRUGI DIO: PROBLEMSKI ZADACI (DA/NE)												
RAZRED	1. razred			2. razred			3. razred			4. razred		
ZADACI/ UČITELJICE	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
UČ 1	NE	NE	DA	DA	NE	NE	DA	NE	DA	DA	NE	DA
UČ 2	NE	NE	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
UČ 3	NE	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	NE
UČ 4	NE	NE	DA	NE	DA	DA	NE	NE	DA	DA	DA	DA
UČ 5	NE	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	NE
UČ 6	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
UČ 7	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
UČ 8	NE	NE	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
UČ 9	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA
UČ 10	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
UČ 11	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	NE
UČ 12	DA	DA	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA	DA	NE	DA
UKUPNO	6DA/6NE	4DA/8NE	12DA	11DA/1NE	6DA/6NE	11DA/1NR	11DA/1NE	5DA/7NE	12DA	12DA	6DA/6NE	10DA/2NE

**Tablica 4:** Vrednovanje zadataka prema tome jesu li problemski ili ne

Stavovi učiteljica o tome jesu li neki zadaci problemski ili ne varira od zadatka do zadatka pa tako sveukupno za prve zadatke 83,3% učiteljica smatra da su problemski. Od svih prvih zadataka učiteljice najmanje problemskim smatraju onaj iz ispita za 1. razred, njega problemskim smatra samo 6 učiteljica odnosno 50%. Učiteljice koje smatraju da ovaj zadatak nije problemski kažu kako je vrlo jednostavan i da pripada redovnoj nastavi, dok jedna od

učiteljica koja smatra da ovo jest problemski zadatak kaže: *S ovakvim problemskim zadacima mi i počinjemo u prvom razredu, od najjednostavnijih.* (UČ 7)

Prvi zadatak drugog razred problemskim smatra čak 92% učiteljica ističući razloge kao što su: da ima dosta koraka, od djece zahtjeva dosta koncentracije i da djeca imaju problem s jedinicama za mjerenje mase. Iako se ovdje ne radi o mjerenju mase kažu kako to djecu zbunjuje.

*Zahtjeva od njih da se skoncentriraju na pojedine artikle* (UČ 6), *ima dosta podataka i računskih radnji.* (UČ 12)

*Kada djeca vide jedinice za mjerenje mase, volumena tu se oni pogube, čim pišu kg i l njima je to puno teže.* (UČ1)

U trećem razredu problemskim ga smatra također 92%, a u četvrtom 100% učiteljica. Ono što u četvrtom učiteljice iznose kao najveći problem jesu jedinice za mjerenje vremena. *Čim je vrijeme, pogotovo kada moraju sate prebacit to im je teško.* (UČ 10)

Kao velik problem rješavanja ovog tipa zadatka učiteljice ističu čitanje, naime sve učiteljice kažu kako djeca sa svakom generacijom sve lošije čitaju i brže im opada koncentracija što utječe na njihovo rješavanje zadatka.

*Učenicima koji imaju problema s razumijevanjem pročitanoog teksta bi malo teže išlo.* (UČ 1)

*Zna se dogoditi da djeca znaju riješiti zadatak, ali ga ne pročitaju do kraja, nego samo pogledaju brojeve.* (UČ 3)

*Smatram da je dobro pročitani problemski tekstualni zadatak već pola riješen, ali djeca valjda kada čitaju to negdje otiđe ne čitaju umno već izgleda samo jezikom.* (UČ 5)

*Djeca sve teže čitaju imaju problem s razumijevanjem teksta to je problem novih generacija. Vidim da je djeci teško, nešto što su mi u prošlim generacijama djeca znala riješiti danas ne znaju i to djeca iste dobi.* (UČ 7)

Drugi zadatak u prvom razredu 66, 6% učiteljica smatra običnim, neproblemskim zadatkom jer kako kažu djeca vrlo dobro barataju novcem i lako se s njime služe pa misle da im ovaj zadatak ne bih bio problem. U ostala tri razreda, drugi zadaci su bili s redoslijedom računskih radnji njih su učiteljice uglavnom polovično smatrale problemskima dok je ipak malo više onih koje smatraju da nisu problemski.

Tablica množenja je ovdje najbitnija, tko nauči nju dobro, baratati sa zagradama i redoslijed kako što ide onda im to ne bih trebao bit problem. (UČ 3)

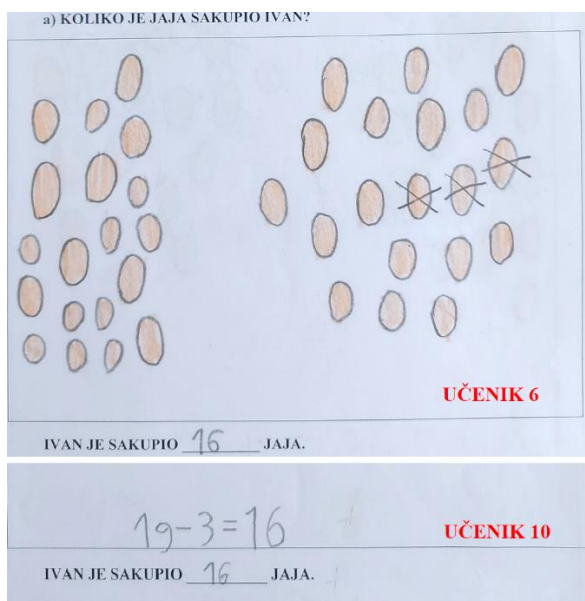
Ovo nije problemski zadatak, ovo je pravilo redoslijeda računskih radnji. (UČ 5)

Drugi zadatak nije nikakva problemski, ovo je čist račun i poznavanje redoslijeda izvođenja računskih radnji, korištenje znanja. Djeca imaju unaprijed poznat princip rješavanja to jest imaju pravilo po kojem trebaju rješavat stoga smatram da ovi drugi zadaci nisu problemski. (UČ 12)

Što se tiče trećih zadataka u sva četiri razreda učiteljice u 91.6% slučajeva smatraju da su oni problemski. Zadatke u 1. i 3. razredu problemskima smatraju sve učiteljice dok onaj u 2.razredu problemskim smatra 92% i u 4. razredu 75% učiteljica.

Za zadatak u drugom razredu učiteljice kažu kako djeca moraju poznavati životinjski svijet i povezati koliko nogu djeca, a koliko psi imaju, a za onaj u 3. da je vrlo apstraktan i da nema mnogo podataka pa da je zato djeci izazov, a zadatak u 4. razredu najmanje učiteljica smatra problemskim.

Posljednji dio istraživanja odnosi se na vrednovanje učeničkih radova odnosno riješenih problemskih zadataka gdje su učiteljicama pokazani neki primjeri načina rješavanja i pitalo ih se da usporede različite načine rješavanja i kako bi ih vrednovale, jednako ili različito.



Slika 26: Primjeri rješavanja prvog zadatka 1.r.

Na **slici 26** se mogu vidjeti prvi, učiteljicama prikazani, načini rješavanja. U ovom primjeru je riječ o prvom zadatku u prvom razredu, a učiteljicama su prikazani primjeri različitog načina rješavanja i pitalo ih se da usporede primjere i kažu kako bi ih vrednovale. Deset od dvanaest učiteljica reklo je kako bi oba načina rješavanja vrednovale jednako s punim brojem bodova.

*Vrednovala bih jednako jer su oba točno riješila samo su na drugačiji način došli do odgovora. Dala bi oboje po 2 boda za postupak i odgovor. (UČ 2)*

*Jednako bih vrednovala, bitno mi je da su došli do rješenja to što je jedan crtao, a drugi koristio matematički izraz mi nije toliko važno jer su točni. (UČ 6)*

*Vrednovala bih jednako. Jedno dijete je matematički, a drugo je modeliralo crtežom- to je pametno rješenje. (UČ 11)*

Od preostale dvije učiteljice jedna bi rješenja vrednovala jednako, ali bi za oba dala po bod manje: *Dala bih za ovaj zadatak 3 boda, a svaki od njih bi dobio po 2. U jednom rješenju fali crtež, a u drugom fali račun. (UČ 7)* dok druga učiteljica ima drugačiji pristup i kaže kako bi ona učeniku koji je crtao od ukupna 2 boda dala bod manje jer nema računa.

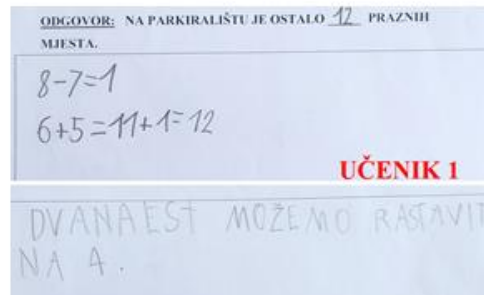
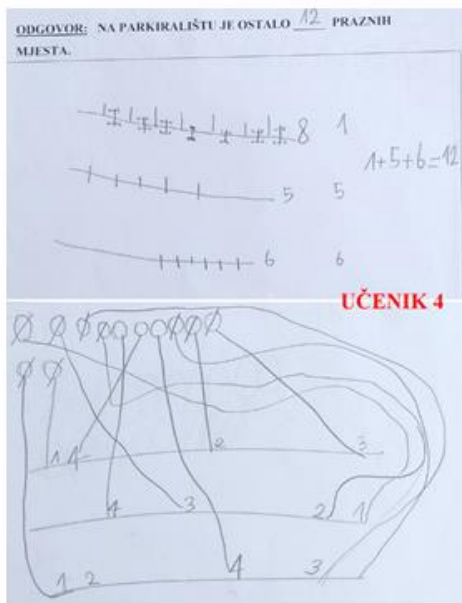
Sljedeća slika pokazuje rješenja učenika za treći zadatak u 1. razredu. Za ova dva rješenja jedanaest učiteljica reklo je kako bi ih jednako vrednovale dok je samo jedna učiteljica rekla kako joj niti jedan nije točan do kraja.

*Nije važan način dolaska do rješenja važno je da je točno, vrednovala bih jednako. S razumijevanjem su čitali i iznašli svoja rješenja. (UČ 1)*

*U ovakvim računskim pričama dajem nekoliko bodova. Volim kada mi djeca napišu kako su došli do rješenja, a ne samo iz glave da napišu. (UČ 11)*

*Za ovaj zadatak pod **a** dala bih 3 boda. Prvo da uoče da u prvom redu ima jedno prazno mjesto zatim dodati drugi i treći red i konačan rezultat. Jednako bih vrednovala oba učenika jer su vidljive sve tri radnje iako bi se kod učenika 1 moglo umanjiti za bod jer je uradio nedopustivu radnju (dodao iza znaka jednako nešto što nije bilo tu prethodno). Dok u djelu zadatka pod **b** učenik 4 bi dobio dva, a učenik 1 jedan bod i to zato jer nema prikazan način rješavanja. (UČ 12)*





**Slika 27:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 1. r.

Slika 28 prikazuje dva načina rješavanja prvog zadatka u 2. razredu dok učenik 6 koristi uzastopno zbrajanje, učenik 18 se koristi množenjem kako bi došao do rješenja. Unatoč različitom načinu rješavanja sve bi učiteljice jednako vrednovala oba primjera, osim što bih jedna učiteljica dala samo djelomične, a ostale učiteljice potpune bodove.

*Ja bih stavila 6 bodova, ali ovdje nema mjernih jedinica ja bi oduzela tu bod oboma. (UČ 7)*

*Ne bi im smanjivala bodove ako su na neki svoj način rješavali, važno mi je da dođu do rezultata i da vidim način na koji su razmišljali. (UČ 3)*

*Jednako bi ih vrednovala, iako se tu vidi da dijete pod brojem 18 to puno bolje skombinira u svojoj glavi, ali naravno oba su točna. (UČ 4)*

*Dijete 18 je zrelije matematički jer shvaća da je uzastopnom zbrajanju istog pribrojnika kraći zapis množenje i to primjenjuje. Oba bih jednako vrednovala bez obzira što je ovaj zbrajao a drugi množio. (UČ 8)*

1.) Lucija je mama dala 95 kuna i poslala ju trgovinu da kupi 3 litre ulja, 5 kilograma šećera i 2 mlijeka, a za ostatak može kupiti čokoladice. Litra ulja košta 15 kuna, 1 kilogram šećera košta 7 kuna, a jedno mlijeko košta 3 kune.

a) Koliko je ukupno Lucija novca potrošila na namirnice po koje ju je mama poslala?

$15+15+15=45$      $7+7+7+7+7=35$   
 3 litre ulja    5 kilograma šećera

$3+3=6$      $(45+35)+6=80+6=86$   
 2 mlijeka

**UČENIK 6**

b) Koliko je novca Luciji ostalo? Koliko čokoladica može kupiti ako svaka čokoladica košta 4 kune?

$10-4-4=2$   
 Mogla je kupiti 2 čokolade

1.) Lucija je mama dala 95 kuna i poslala ju trgovinu da kupi 3 litre ulja, 5 kilograma šećera i 2 mlijeka, a za ostatak može kupiti čokoladice. Litra ulja košta 15 kuna, 1 kilogram šećera košta 7 kuna, a jedno mlijeko košta 3 kune.

a) Koliko je ukupno Lucija novca potrošila na namirnice po koje ju je mama poslala?

$3 \cdot 15 = 45$      $5 \cdot 7 = 35$      $2 \cdot 3 = 6$   
 $45 + 35 + 6 = 86$   
 $95 - 86 = 9$      $9 - 4 = 5$      $5 - 4 = 1$   
 Može kupiti 2 čokoladice.

**UČENIK 18**

b) Koliko je novca Luciji ostalo? Koliko čokoladica može kupiti ako svaka čokoladica košta 4 kune?

$95 - 86 = 9$      $9 - 4 = 5$      $5 - 4 = 1$   
 Može kupiti 2 čokoladice.

Slika 28: Primjeri rješavanja prvog zadatka 2. r.

Drugi zadatak u 2. razredu niti jedan učenik nije točno riješio pa se učiteljicama postavilo pitanje što one misle zašto se to dogodilo. Većina učiteljica je odgovorila kako djeca ne znaju redosljed računskih radnji, neke su dodale da vjerojatno imaju problema s tablicom množenja i da ima dosta računskih radnji u zadatku. No što se tiče vrednovanja ove vrste problemskih zadataka učiteljice kažu kako one ove zadatke boduju prema broju računskih radnji u zadatku, koliko točno računskih radnji učenik napravi toliko bodova dobije.

Sljedeća slika prikazuje načine rješavanja trećeg zadatka u 2. razredu u kojem su djeca trebala doznati koliko djece i pasa se nalazi u dvorištu. Posebnost ovog zadatka jest što su djeca mogla dobiti različite točne odgovore. Svim učiteljicama su se sviđjeli načini na koje su djeca došla do rješenja i rekle su kako bi svi dobili jednak broj bodova.

3.) U mojemu dvorištu nalazi se 30 nogu. U dvorištu se nalaze samo psi i djeca. Koliko bi djece i pasa moglo biti u dvorištu?

**UČENIK 4**

**UČENIK 18**

U dvorištu je 7 djece i 4 psa.

3.) U mojemu dvorištu nalazi se 30 nogu. U dvorištu se nalaze samo psi i djeca. Koliko bi djece i pasa moglo biti u dvorištu?

$2+2+2+2+2+4+4+4+4+4=30$

Ima petoro djece i petoro pasa.

**UČENIK 8**

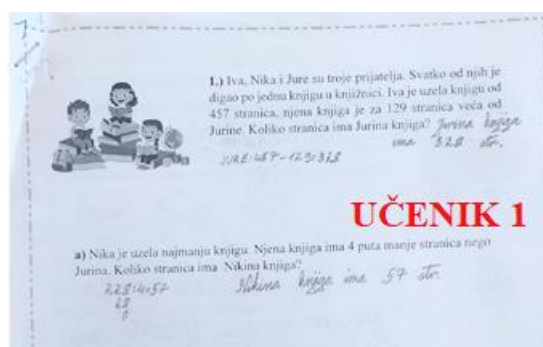
Slika 29: Primjeri rješavanja trećeg zadatka 2.r.

Slika broj 30 prikazuje pogrešku koja se dogodila učeniku kod prepisivanja brojke. Iako je dobro oduzeo i dobio točno rješenje kod prepisivanja broja u drugi dio zadatka je pogriješio, ali je postupak dijeljenja napravio ispravno. Stoga se nastojalo saznati što učiteljice vrednuju u ovakvim situacijama. Sedam učiteljica izjavilo je kako ne bih priznale učeniku ovu pogrešku odnosno učenik ne bi dobio nikakav bod. *Ne bih dala bod trebaju biti oprezniji* (UČ 3) *ova pogreška ukazuje na manjak koncentracije.* (UČ 8)

Dvije učiteljice kažu kako bi procijenile ovisno o djetetu: *Procijenim prema djetetu, kod nekoga je to lapsuz, žao mi je nekada da izgube bodove jer su krivo prepisali.* (UČ 2)

Od ostalih učiteljica jedna kaže kako bi dala učeniku pola boda za ispravno dijeljenje, a preostale dvije da bih dale cijeli bod: *Dala bi učeniku bod, ako je pogrešno prepisao rezultat, a opet uspio podijeliti pravilo, ali bi ga upozorila za ubuduće da mu se može dogoditi da neće moć taj broj podijelit pa će doći do toga da pregleda gdje je pogriješio.* (UČ 12)

*Dala bi mu bod, ja mislim da bi ispit trebao imati nekoliko ocjena (točnost, brzina, koncentracija) pa bi on prema dva elementa dobio plus, a za koncentraciju minus. Iz razloga što je on to sve točno riješio u zadanom vremenu, ali je malo popustila koncentracija.* (UČ 9)



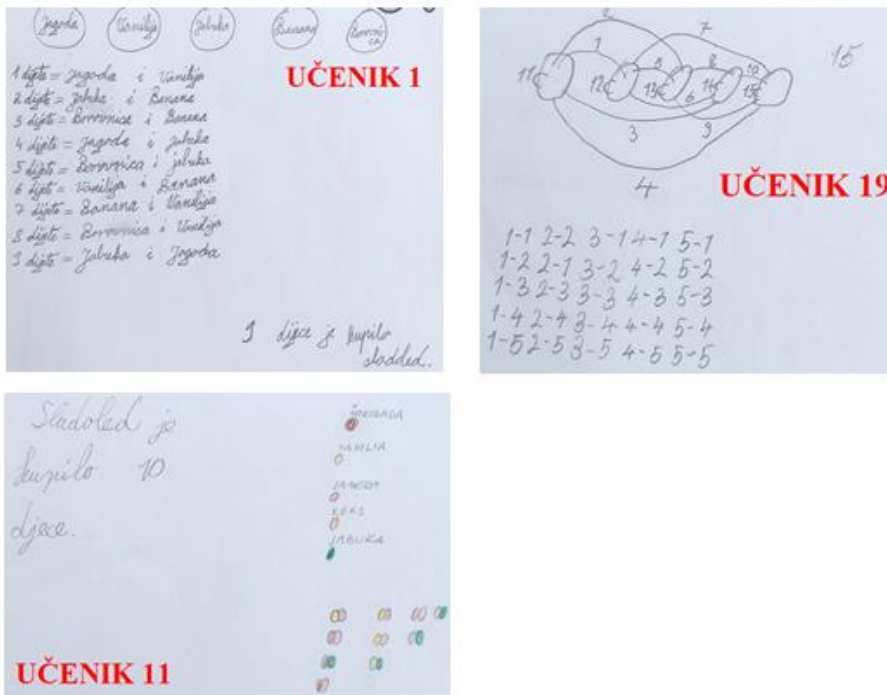
**Slika 30:** Primjer rješavanja prvog zadatka 3.r.

Sljedeća slika prikazuje treći zadatak 3.razreda koji je nešto zahtjevniji i kojeg je samo jedan učenik (učenik 19) uspio točno riješiti. Sve učiteljice su rekle kako bi ovaj zadatak nosio više bodova, a da bi učenik 19 dobio sve bodove dok ostali ovisno o tome koliko su riješili.

*Ovdje bi trebalo ideju nagraditi kako su oni to krenuli, malo su se zbrkali bilo je još kombinacija koje oni nisu tu napisali. Ako bi zadatak na primjer nosio 4 boda dala bi njima dvojici 2 boda.* (UČ 9)

U zadatku mora se vrednovati postavljanje zadatka, rješavanje, rješenje i odgovor. Tako da bih ako zadatak nosi 5 bodova njima dala 3 boda. (UČ 10)

Učeniku 19 bi dala sve bodove, a od ostale djece bilo koje dijete koje je odradilo bilo koju fazu zadatka bih bodovala. (UČ 8)



Slika 31: Primjeri rješavanja trećeg zadatka 3. r.

Posljednji primjer koji je dan učiteljicama na uvid je primjer prvog zadatka 4. razreda točnije drugi dio zadatka kojeg je samo jedan učenik i to djelomično točno riješio. Šest učiteljica je reklo kako bi učeniku dalo bod jer je jedini točno riješio zadatak, dvije učiteljice su rekle kako bi dobio samo pola boda dok četiri učiteljice ne bih priznale polovičan odgovor. Problem zbog kojeg djeca nisu dobro riješila zadatak učiteljice smatraju nepažljivo čitanje i nerazumijevanje teksta i loše poimanje sata.

Mislim da nisu znali pretvoriti minute kako treba. Problem mjerenja vremena i mase uvijek imaju. Učeniku bi dala cijeli bod iako je djelomično riješio zadatak. (UČ 1)

Razlog netočnog rješavanja kod većine učenika smatram nepažljivo čitanje zadatka. Ovom učeniku bi dala bod jer je jedini točno riješio, barem dio. U ovakvim zadacima je vrlo važno da čitaju pažljivo. (UČ 12)


Imaju problem s poimanjem ure/sata, a učeniku ne bi dala bod. Vrednujem prema broju računskih radnji pa koliko su ih dobro riješili dobiju toliko bodova. (UČ 5)

1.) Na željezničkoj postaji pristižu vlakovi. Vlak broj 3 trebao je na postaji biti u 8:35, ali kasno je 17 minuta. Kada je vlak broj 3 stigao na željezničku postaju?

$$\begin{array}{r} 8:35 \\ + 17 \\ \hline 8:52 \end{array}$$

**UČENIK 4**

VLAK BROJ 3  
JE NA ŽELJEZNIČKU  
STIGAO U 8:52.



a) Vlak broj 7 na postaju dolazi 23 minuta nakon vlaka broj 3 te tako kasni 8 minuta. Kada je vlak broj 7 došao na postaju, a kada je po rasporedu trebao stići?

$$\begin{array}{r} 8:52 \\ + 23 \\ \hline 9:15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7:45 \\ - 60 \\ \hline 7:45 \end{array}$$

VLAK BROJ 7 JE DOŠAO  
NA POSTAJU U 9:15.

Slika 32: Primjer rješavanja prvog zadatka 4.r.

## 9) ZAKLJUČAK

Problemski zadaci kroz povijest i u tradicionalnoj nastavi nisu bili prepoznati kao izrazito bitni no danas se to mijenja. Kroz teorijski dio smo vidjeli kako se u svijetu tako i Hrvatskoj kroz reformatorske procese problemski zadaci počinju isticati kao bitan dio nastave matematike. U odgojno- obrazovnim *ciljevima* stoji rješavanje problemskih situacija, a jedan od matematičkih *procesa* jesu rješavanje problemskih zadataka i matematičko modeliranje, stoga se i u ovom radu nastojao prikazati jedan aspekt problemskih zadataka u nastavi matematike.

Ovim istraživanjem željelo se ispitati kako učenici rješavaju problemske zadatke, koliko su uspješni u tome i koriste li se više matematičkim ili modeliranjem konkretima. Nadalje kakve stavove učiteljice imaju prema njima, koje zadatke smatraju problemskima, a koje ne te naposljetku kako vrednuju problemske zadatke.

Kroz ispite za četiri razreda koje je rješavalo 70 učenika dobili su se odgovori na prva pitanja. Učenici u prvom razredu najčešće nisu koristili niti jednu vrstu modeliranja pri rješavanju zadataka dok je broj korištenja matematičkog i modeliranja crtežom bio gotovo jednak, a najbolja riješenost je bila u prvom zadatku. Modeliranje konkretima se smanjuje sa svakim razredom, a sve više učenici modeliraju matematički gdje je iznimka bio treći zadatak 3. razreda. Najmanju uspješnost u rješavanju su učenici imali u zadacima s redosljedom računskih radnji, dok se najveća kreativnost mogla vidjeti u trećim zadacima koji su nešto kompleksniji.

Kroz intervju s učiteljicama saznalo se kako one problemske zadatke percipiraju kao zadatke riječima i logičke zadatke koji od učenika zahtijevaju neku veću mentalnu koncentraciju, a koriste ih kao kažu kao zadatke za motivaciju i uvježbavanje no najčešće ipak u uvježbavanju i ponavljanju. Kada nitko ne zna riješiti problemski zadatak zajedno ga rješavaju s učenicima na ploči što se prema teoriji ne smatra dobrim primjerom jer se kosi sa samom definicijom problemskog zadataka gdje je važan element samostalnosti u rješavanju. No uzimajući u obzir da prema odgovorima ni nemaju dobru percepciju što to je to problemski zadatak ovi rezultati ne iznenađuju. Pozitivno je za istaknuti da većina učiteljica smatra kako problemske zadatke treba dati svim učenicima na rješavanje, a ne samo uspješnijima. Većinu pokazanih zadatak učiteljice su smatrale problemskima s iznimkom drugih zadataka.

Načini vrednovanja kod učiteljica su se pokazali vrlo sličnima odnosno sve uglavnom vrednuju svaki korak pri rješavanju posebno i tako oblikuju bodove dok se kod specifičnih situacija kao kada samo jedan učenik riješi zadatak ili učini neku pogrešku u prepisivanju stavovi razlikuju.

Vrlo zanimljivo je bilo što su sve učiteljice izjavile kako učenici sve lošije čitaju i razumiju pročitani tekst što čini velik problem pri rješavanju problemskih zadataka riječima.

Problemski zadaci imaju važnu ulogu u nastavi matematike te je važno educirati učitelje o tome što oni jesu i kako se provodi problemski orijentirana nastava. Nadalje kako ih treba nuditi svim učenicima jer su to zadaci koji pomažu razvijanju kreativnosti i logičkog razmišljanja što će učenicima kako u daljnjem školovanju tako i u životu biti vrlo važno.

## 10) LITERATURA

- 1) Andrić, V. (2017), Jedan problem-više matematičkih modela, U: Gortan, R., *Modeliranje i matematika*, Pula: Matematičko društvo Istra, 96-104
- 2) Andrews, P. i Xenofontos, C. (2015), *Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of three Cypriot primary teachers*, J Math Teacher Educ Vol: 18, 299–325
- 3) Awantagusnik, A. i sur. (2021), Mathematical representation process analysis of students in solving contextual problem based on Polya's strategy, AIP Conference Proceedings 2330, Dostupno na: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0043422>
- 4) Baranović, N. (2021), *O procesu rješavanja problemskih zadataka*, Stručni kolokvij udruge matematičara Osijek, Dostupno na: [http://umo.mathos.unios.hr/wp-content/uploads/2021/01/Baranovic\\_prosireni\\_sazetak.pdf](http://umo.mathos.unios.hr/wp-content/uploads/2021/01/Baranovic_prosireni_sazetak.pdf)
- 5) Begović, E. (2017), *Matematičko modeliranje u osnovnoškolskoj nastavi*, Matematika i škola, Vol. 81, br. 4, 17-21, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/23/broj/81/clanak/1130/matematicko-modeliranje-u-osnovnoskolskoj-nastavi>
- 6) Blanton, M. L. i Kaput, J. J. (2005), Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, Journal for Research in mathematics education, Vol. 36, br. 5, 412-446, Dostupno na: <https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf>
- 7) Burnett, J. (2022), Adopt a Piagetian approach to teaching mathematics concepts and skills, ORIGO education, Dostupno na: <http://origoeducation-thailand.com/blog/piagetian-approach-to-teaching/>



- 8) Cindrić, M. (2016), *Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole*, Časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 17 No. 65, 52-57, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/169560>
- 9) Cooper-Twamley, S. i Wesley Null, J. (2009), *E. L. Thorndike and Edward Brooks- Two views on mathematics curriculum and teaching*, American educational history journal, Vol. 36, br. 1, 191-206, Dostupno na: [https://books.google.hr/books?hl=en&lr=&id=srDWCQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA191&dq=thorndike+theory+of+learning+mathematics&ots=n\\_tkpKaBbM&sig=YSQsCSjxn7x25ED4Mbwkt-hmmOk&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.hr/books?hl=en&lr=&id=srDWCQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA191&dq=thorndike+theory+of+learning+mathematics&ots=n_tkpKaBbM&sig=YSQsCSjxn7x25ED4Mbwkt-hmmOk&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false)
- 10) Cotič, M. i Felda, D. (2011), *Solving realistic problem sin the initial instruction of mathematics*, Metodčki obzori 11, vol. 6, 49-61, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/106015>
- 11) Darwani, S. i sur. (2020), *Adaptive reasoning and strategic competence through problem based learning model in middle school*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1460, 1-5, Dostupno na: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1460/1/012019>
- 12) Delić-Zimić, A. (2015), *Problemski zadaci u početnoj nastavi matematike*, Academia, Dostupno na: [https://www.academia.edu/12432282/Problemski\\_zadaci\\_ns](https://www.academia.edu/12432282/Problemski_zadaci_ns)
- 13) Dijanić, Ž. i sur. (2017), *Kategorije znanja u matematici*, Matematika i škola, Vol. 81, br. 2., 3-10, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/23/broj/81/clanak/1128/kategorije-znanja-u-matematici>
- 14) Dražić, I. (2017), *Matematičko modeliranje u nastavnom procesu*, U: Gortan, R., *Modeliranje i matematika*, Pula: Matematičko društvo Istra, 83-95
- 15) Ersoy, E. (2017), *The evaluation of problem solving in mathematics course according to student views*, ITM Web of Conferences 13, 1-18, Dostupno na: [https://www.itm-conferences.org/articles/itmconf/abs/2017/05/itmconf\\_cmes2017\\_01012/itmconf\\_cmes2017\\_01012.html](https://www.itm-conferences.org/articles/itmconf/abs/2017/05/itmconf_cmes2017_01012/itmconf_cmes2017_01012.html)
- 16) Fülöp, E. (2015), *Teaching problem-solving strategies in mathematics*, Lumat, Vol. 3, br. 1., Dostupno na: <https://journals.helsinki.fi/lumat/article/download/1050/1043/3457>

- 17) Gandhi, D. B. (2010), Thorndike's laws of learning and its educational implications, Educational Psychology, Dostupno na: <http://dgwaymade.blogspot.com/2010/10/thorndikes-laws-of-learning-and-its.html>
- 18) Glasnović Gracin, D. (2009), *Nove tendencije u nastavi matematike*, Pogled kroz prozor, br. 7, ISSN 1848-2171, Dostupni na: <https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/nove-tendencije-u-nastavi-matematike/>
- 19) Glasnović Gracin, D. (2015), *Njegovo veličanstvo „zadatak“*, Matematika i škola, Vol. 82, br. 1. 50-50, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/23/broj/82/clanak/1140/njegovo-velicanstvo-zadatak>
- 20) Gusić, J. (2017), Što želimo postići matematičkim modeliranjem u nastavi matematike, U: Gortan, R., *Modeliranje i matematika*, Pula: Matematičko društvo Istra, 36-49
- 21) Guzman Gurat, M. (2018), *Mathematical problem-solving strategies among student teachers*, Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, Vol. 11, br. 3, 53-64, Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1208772.pdf>
- 22) Harris, K. (2018), *New Math: The Curriculum That Failed Students And Teachers*, Groovey history, Dostupno na: <https://grooveyhistory.com/remember-new-math/3>
- 23) Henningsen, M. i Stain, M. K. (1997), *Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning*, Journal for research in mathematics education, Vol. 28, br. 5, 524-549
- 24) Hercigonja, Z. (2017), *Ocjenjivanje znanja*, Dostupno na: <https://suvremeninastavnik.wordpress.com/2017/09/17/ocjenjivanje-znanja/>
- 25) Hiebert, J. i sur. (1986), *Conceptual and procedural knowledge*, New York: Routledge
- 26) Hodnik Čadež, T. i Kolar, V. M. (2017), *Monitoring and guiding pupils' problem solving*, Magistra Iadertina, 12 (2 - tematski broj), 0-139, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/200124>
- 27) Horvat, Z. (2018), *Motivacija u suvremenoj nastavi matematike*, Poučak Vol. 19, No. 73, 21-28, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/308149>
- 28) Hurrel, D. (2021), *Conceptual knowledge or procedural knowledge or conceptual knowledge and procedural knowledge: Why the conjunction is important to teachers*,

Australian Journal of Teacher Education, Vol. 46, br. 2, 57-71, Dostupno na:

<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1296887.pdf>

30) Isbrucker, A. (2021), *What Happened to 'New Math'?*, Medium, Dostupno na:

<https://medium.com/age-of-awareness/what-happened-to-new-math-eeb8522fc695>

31) Janković, S. (2016), *Primjena problemske nastave u realizaciji sadržaja početne nastave matematike*, Godišnjak pedagoških fakulteta u Vranju br. 7, Dostupno na:

<http://scindeks.ceon.rs/article.aspx?artid=2466-39051607363J>

32) Jurić, J. i sur (2019), *Struktura zadataka prema Bloomovoj taksonomiji u udžbenicima iz matematike za radnu nastavu*, Školski vjesnik Vol. 68, br. 2, 469-487, Dostupno na:

<https://hrcak.srce.hr/clanak/341529>

33) Juričić, D. (2016), *SOLO taksonomija-dizajn poučavanja po CAR modelu*, Dostupno na:

<https://dinkajuricicblog.wordpress.com/tag/solo-taksonomija/>

34) Jurjević Jovanović, I. i sur. (2020), *Vrednovanje u razrednoj nastavi*, Zagreb: Školska knjiga

35) Kadum, V. (1999), *Učenje putem rješavanja problema*, U: Kadum, V., *Utjecaj rješavanja problema na obrazovni učinak u nastavi matematike*, Rovinj: Hrvatsko matematičko društvo, 9-27

36) Kadum, V. (2005a), *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi (matematike)*, Pula: IGSA

37) Kadum, V. (2005b), *Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike*, *Metodički ogledi*, 12 (2), 31-60, Dostupno na:

<https://hrcak.srce.hr/2336>

38) Kadum-Bošnjak, S. i Brajković, D. (2007), *Praćenje, provjeravanje i ocjenjivanje učenika u nastavi*, *Metodički obzori*, 2 (4), 35-51, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/30415>

39) Kadum S. i Kadum, V. (2019), *Poglavlja iz didaktike matematike*, Zagreb: Element

40) Kaharuddin, A., i Hajeniati, N. (2020), *An identification of students' responses based on solo taxonomy in mathematics learning toward learning activities and learning outcomes*, Al-Jabar: *Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(2), 191-200, Dostupno na:

[https://www.researchgate.net/publication/347714664\\_An\\_Identification\\_of\\_Students'\\_Respon](https://www.researchgate.net/publication/347714664_An_Identification_of_Students'_Respon)

ses Based on Solo Taxonomy in Mathematics Learning Toward Learning Activities and Learning Outcomes

- 41) Kilpatrick, J. i sur. (2001), *Adding it up*, Washington DC: National research council
- 42) Kilpatrick, J. i sur. (2003), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, SAD: NCTM
- 43) Klasnić, I. (2009), *Problemski zadaci - kako ih rješavaju uspješni i neuspješni učenici*, *Odgojne znanosti* Vol. 11, br. 1, 143-153, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/40006>
- 44) Kolar, A. M. (2018), *Analiza strategija pri rješavanju matematičkih problema*, Vol, 94 br. 2, 147-153, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/26/broj/94/clanak/1305/analiza-strategija-pri-rjesavanju-matematickih-problema>
- 45) Kos, D. i Glasnović Gracin, D. (2012), *Problematika tekstualnih zadataka*, *Matematika i škola*, Vol. 66, br. 3, 5-8, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/20/broj/66/clanak/933/problematika-tekstualnih-zadataka>
- 46) Kramberger Rom, P. (2020), *Učenje putem rješavanja problema u nastavi*, *Varaždinski učitelj-digitalni stručni časopis za odgoj i obrazovanje*, 3 (3), 1-7, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/344280>
- 47) Kurnik, Z. (1999), *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, U: Kadum, V., *Utjecaj rješavanja problema na obrazovni učinak u nastavi matematike*, Rovinj: Hrvatsko matematičko društvo, 77-91
- 48) Kurnik, Z. (2000), *Matematički zadatak*, *Matematika i škola*, Vol. 7. br, 2, 51-58, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/3/broj/7/clanak/54/matematicki-zadatak>
- 49) Kurnik, Z. (2002), *Problemska nastava*, *Matematika i škola*, Vol. 15, br. 2, 196-202, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/4/broj/15/clanak/145/problemska-nastava>
- 50) Kurnik, Z. (2004), *Znanja*, *Matematika i škola*, Vol. 26, br. 2., 4-7, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/7/broj/26/clanak/337/znanja>
- 51) Kurnik, Z. (2006), *Heuristička nastava*, *Matematika i škola*, Vol. 34, br. 2, 148-153, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/8/broj/34/clanak/398/heuristicka-nastava>
- 52) Kurnik, Z. (2007), *Nastavni sat matematike*, *Matematika i škola*, Vol. 38, br. 2, 99-104, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/9/broj/38/clanak/461/nastavni-sat-matematike>

- 53) Kurnik, Z. (2009), *Znanstveni okviri nastave matematike*, Zagreb: Element
- 54) Kurnik, Z. (2010), *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Zagreb: Element
- 55) Kuzle, A. (2016), *Problem solving ili rješavanje matematičkih problema-pregled*, Matematika i škola, Vol. 86, br. 2, 3-11, Dostupno na:  
<https://mis.element.hr/list/25/broj/86/clanak/1194/problem-solving-ili-rjesavanje-matematickih-problema-pregled-literature>
- 56) Lessani, A. i sur. (2016), *Comparison of Learning Theories in Mathematics Teaching Methods*, 21st centuri academic forum, Vol. 9, br. 1, 165-174 Dostupno na:  
[https://www.21caf.org/uploads/1/3/5/2/13527682/14hrd-4111\\_lessani.pdf](https://www.21caf.org/uploads/1/3/5/2/13527682/14hrd-4111_lessani.pdf)
- 57) Majdiš, B. (2019), *Primjena kreativnih tehnika u nastavi matematike*, Zagreb: Alfa
- 58) Markovac, J. (2001), *Metodika početne nastave matematike*, Zagreb: Školska knjiga
- 59) Martin, W. G. i sur. (2000), *Principles and standards for school mathematics*, SAD: NCTM
- 60) Matijević, M. (2011), *(Na)učiti kako se uči (matematika)*, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 12 No. 45, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/103844>
- 61) Menon, U. i Gyan, J. (s.a.), *Realistic Mathematics Education*, Jodo Gyan, Dostupno na:  
<https://sites.google.com/a/jodogyan.org/www/realistic-mathematics-education>
- 62) Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta – MZOS (2006), *Nacionalni plan i program za osnovnu školu*, Dostupno na: [http://www.os-ksdjalskog-zg.skole.hr/upload/os-ksdjalskog-zg/images/static3/1811/attachment/Nastavni\\_plan\\_i\\_program\\_za\\_osnovnu\\_skolu\\_-\\_MZOS\\_2006\\_.pdf](http://www.os-ksdjalskog-zg.skole.hr/upload/os-ksdjalskog-zg/images/static3/1811/attachment/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf)
- 63) Mišurac Zorica, I. i Plazibat, M. (2005), *Aktivno učenje matematike u razrednoj nastavi*, U: Kadum, V., *Motivacija u nastavi matematike*, Pula: Hrvatsko matematičko društvo, 38-51
- 64) Mišurac, I. (2014), *Suvremeni standardi matematičkih kompetencija u početnoj nastavi matematike*, Split: Filozofski fakultet Sveučilišta u Splitu
- 65) Musser, G. L. i sur. (2008), *Mathematics for elementary teachers*, SAD: Wiley
- 66) Mužić, V. i Vrgoč, H. (2005), *Vrednovanje u odgoju i obrazovanju*, Zagreb: Hrvatski pedagoško-književni zbor

- 67) MZO (2017), Nacionalni dokument matematičkog područja kurikuluma, Dostupno na: <https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Obrazovanje/NacionalniKurikulum/PodrucjaKurikuluma/Matemati%C4%8Dko%20podru%C4%8Dje.pdf>
- 68) MZO – Škola za život (2019), *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika*, Dostupno na: [https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT\\_kurikulum\\_1\\_71.pdf](https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf)
- 69) Nahdi, D. S. i Jatisunda, M. G. (2020), *Conceptual Understanding And Procedural Knowledge: A Case Study on Learning Mathematics of Fractional Material min Elementary School*, Journal of Physics: Conference Series, Vol, 1477, 1-5, Dostupno na: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1477/4/042037/meta>
- 70) Obradović, M. (1998), *Opća metodika nastave matematike*, Zagreb: Prosvjeta
- 71) Ojose, B. (2008), *Applying Piaget's Theory of Cognitive Development to Mathematics Instruction*, The mathematics educator, Vol. 18, br. 1, 26-30, Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841568.pdf>
- 72) Ovčar, S. (1990), *Razvijanje mišljenja u nastavi matematike*, Čakovec: Zrinski
- 73) Pecko, L. (2015), *Utjecaj problemske nastave na aktivnost učenika u nastavi prirode*, Metodčki obzori, Vol. 10, br. 22, 69-88, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/227287>
- 74) Pleština, J. (2021), *Kako je psiholog Jean Piaget utjecao na matematičko obrazovanje*, Poučak, Vol. 22, br. 86, 4-21, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/269212>
- 75) Polya, G. (1966), *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Zagreb: Školska knjiga
- 76) Polya, G. (2003), *Matematičko otkriće*, Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo
- 77) Potter, M. K. i Kustra, E. (2012), *A primer on learning outcomes and the SOLO taxonomy*, Centre for teaching and learning- University of Windsor, Dostupno na: <https://www.uwindsor.ca/ctl/sites/uwindsor.ca.ctl/files/primer-on-learning-outcomes.pdf>
- 78) Profil klett (2019), Vrednovanje, Dostupno na: [https://www.profil-klett.hr/sites/default/files/files-upload/vrednovanje\\_isjecak.pdf](https://www.profil-klett.hr/sites/default/files/files-upload/vrednovanje_isjecak.pdf)
- 79) Rajčić, L. i sur. (1960), *Nastava matematike u osnovnoj školi*, Zagreb: Školska knjiga
- 80) Rudić, J. i Cindrić, M. (2012), *Oblici tekstualiziranih zadataka množenja i dijeljenja i dječje strategije rješavanja*, Magistra Iadertina, Vol. 7, br. 1, 133-142. Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/9989>

- 81)** Sabo Junger, M. i Lipovec, A. (2022), *Što jest, a što nije matematičko modeliranje u razrednoj nastavi: mišljenja slovenskih i hrvatskih učitelja razredne nastave*, Croatian Journal of Education, Vol.24, br .2, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/clanak/406888>
- 82)** Sahendra, A i sur. (2018), Students' representation in mathematical word problem-solving: Exploring students' self-efficacy, Journal of physics, Vol. 947, 1-5, Dostupno na: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/947/1/012059/pdf>
- 83)** Schoenfeld, A. H. (1992), *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*, Learning from instruction, Dostupno na: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/002205741619600202>
- 84)** Stedall, J. (2014), *Povijest matematike-kratki uvod*, Zagreb: Element
- 85)** Szetala, W. i Nicol, C. (1992), *Evaluating problem solving in mathematics*, Educational leadership, Vol. 49, br. 8, 42-45, Dostupno na: [http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed\\_lead/el\\_199205\\_szetala.pdf](http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_199205_szetala.pdf)
- 86)** Tkalec, Z. i sur. (2015), *Vrednovanje/ocjenjivanje poduzetničke kompetencije korištenjem taksonomija*, Obrazovanje za poduzetništvo, Vol. 5, br. 2, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/220163>
- 87)** Treffers, A. (1993), Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, br. 1, 89-108, Dostupno na: <https://www.jstor.org/stable/3482879?seq=1>
- 88)** Utomo, D. P. i Syarifah, D. L. (2021), Examining mathematical representation to solve problems in trends in mathematics and science study: Voices from Indonesian secondary school students, International journal of education in mathematics, science and technology, Vol. 9, br. 3, 540-556, Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1308278.pdf>
- 89)** Van de Wale, J. A. i sur. (2010), *Elementary and middle school mathematics*, SAD: Allyn & Bacon
- 90)** Van den Hauvel-Panhuizen, M. i Drijvers, P. (2014), Realistic Mathematics Education. U: Lerman, S., *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, 521-534, Dostupno na: [https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/rme\\_encyclopaediamathed.pdf](https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/rme_encyclopaediamathed.pdf)
- 91)** Vizek Vidović V. i sur. (2014), *Psihologija obrazovanja*, Zagreb: IEP



**92)** Vlahović-Štetić, V. i Vizek Vidović, V. (1998), *Kladim se da možeš-psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*, Zagreb: udruga roditelja „Korak po korak“

**93)** Žekelj, A. (2017), Modeliranje u nastavi matematike, *Matematika i škola*, Vol. 78, br. 3, 105-110, Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/22/broj/78/clanak/1085/modeliranje-u-nastavi-matematike>



## 11) POPIS SLIKA I TABLICA

### a) Slike

**Slika 1:** Primjer rješavanja prvog zadatka 1.r. (autorska fotografija)

**Slika 2:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 1. r. (autorska fotografija)

**Slika 3:** Matematičko umijeće,

Preuzeto iz: Kilpatrick, J. i sur. (2003), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, SAD: NCTM

**Slika 4:** Razvoj matematičkog zadatka,

Preuzeto iz: Henningsen, M. i Stain, M. K. (1997), *Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning*, Journal for research in mathematics education, Vol. 28, br. 5, 524-549

**Slika 5:** Sedam načina za poučavanje rješavanja problema

Preuzeto iz: Kuzle, A. (2016), *Problem solving ili rješavanje matematičkih problema-pregled*, Matematika i škola, Vol. 86, br. 2, 3-11, Dostupno na:

<https://mis.element.hr/list/25/broj/86/clanak/1194/problem-solving-ili-rjesavanje-matematickih-problema-pregled-literature>

**Slika 6:** Dinamičko-ciklička interpretacija modela Georga Polye

Preuzeto iz: Kuzle, A. (2016), *Problem solving ili rješavanje matematičkih problema-pregled*, Matematika i škola, Vol. 86, br. 2, 3-11, Dostupno na:

<https://mis.element.hr/list/25/broj/86/clanak/1194/problem-solving-ili-rjesavanje-matematickih-problema-pregled-literature>

**Slika 7:** Modeliranje u nastavi matematike

Preuzeto iz: Cindrić, M. (2016), *Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole*, Časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 17 No. 65, 52-57, Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/169560>

**Slika 8:** Primjer rješenja trećeg zadatka 1. r. (autorska fotografija)

**Slika 9:** Primjer rješavanja drugog zadatka 1. r. (autorska fotografija)

**Slika 10:** Primjer rješavanja prvog zadatka 2.r. (autorska fotografija)

**Slika 11:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 3.r. (autorske fotografije)

**Slika 12:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 2.r. (autorske fotografije)

**Slika 13:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 1. r. (autorska fotografija)

**Slika 14:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 3. r. (autorska fotografija)

**Slika 15:** Shematski prikaz sustava vrednovanja

Preuzeto s: [https://www.profil-klett.hr/sites/default/files/files-upload/vrednovanje\\_ucenika\\_u\\_nastavnom\\_procesu.pdf](https://www.profil-klett.hr/sites/default/files/files-upload/vrednovanje_ucenika_u_nastavnom_procesu.pdf)

**Slika 16:** Holističke rubrike odgojno-obrazovnih ishoda,

Preuzeto s: [https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT\\_kurikulum\\_1\\_71.pdf](https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf)

**Slika 17:** Dijagram riješenosti zadataka u prvom razredu

**Slika 18:** Dijagram riješenosti zadataka u drugom razredu

**Slika 19:** Dijagram riješenosti 2. zadatka u drugom razredu

**Slika 20:** Dijagram riješenosti 1. zadatka u trećem razredu

**Slika 21:** Dijagram riješenosti 2. i 3. zadatka u trećem razredu

**Slika 22:** Primjer rješavanja trećeg zadatka 3.r (autorska fotografija)

**Slika 23:** Dijagram riješenosti zadataka u četvrtom razredu

**Slika 24:** Dijagram riješenosti 2. zadatka u četvrtom razredu

**Slika 25:** Primjer rješavanja drugog zadatka 4.r. (autorska fotografija)

**Slika 26:** Primjeri rješavanja prvog zadatka 1.r. (autorske fotografije)

**Slika 27:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 1. r. (autorske fotografije)

**Slika 28:** Primjeri rješavanja prvog zadatka 2. r. (autorske fotografije)

**Slika 29:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 2.r. (autorske fotografije)

**Slika 30:** Primjer rješavanja prvog zadatka 3.r. . (autorska fotografija)

**Slika 31:** Primjeri rješavanja trećeg zadatka 3. r. (autorske fotografije)

**Slika 32:** Primjer rješavanja prvog zadatka 4.r. . (autorska fotografija)

## **b) Tablice**

**Tablica 1:** *Elementi vrednovanja u nastavi matematike*, Preuzeto s:

**Tablica 2:** *Analitička tablica vrednovanja problemskih zadataka*, Preuzeto s:

**Tablica 3:** *Primjeri problemskih zadataka - prema istraživanju*

**Tablica 4:** *Vrednovanje zadataka prema tome jesu li problemski ili ne- prema istraživanju*

## 12.) PRILOZI

### Prilog 1 – zadaci za prvi razred

1.) MAŠA I IVAN SU BILI KOD BAKE NA SELU. BAKA IM JE ZADALA ZADATAK DA SAKUPE JAJA IZ KOKOŠINJCA.



a) KOLIKO JE JAJA SAKUPIO IVAN?

ODGOVOR: \_\_\_\_\_

b)



A large empty rectangular box for writing the answer.

**ODGOVOR:** \_\_\_\_\_

2.)



ODGOVOR: \_\_\_\_\_



**ODGOVOR:** \_\_\_\_\_



**ODGOVOR:** \_\_\_\_\_



3.)

a)



**ODGOVOR:** \_\_\_\_\_

b)



**ODGOVOR:** \_\_\_\_\_

## Prilog 2 – zadaci za drugi razred



1.) Luciji je mama dala 95 kuna i poslala ju trgovinu da kupi 3 litre ulja, 5 kilograma šećera i 2 mlijeka, a za ostatak može kupiti čokoladicu. Litra ulja košta 15 kuna, 1 kilogram šećera košta 7 kuna, a jedno mlijeko košta 3 kune.

a) Koliko je ukupno Lucija novca potrošila na namirnice po koje ju je mama poslala?

b) Koliko je novca Luciji ostalo? Koliko čokoladica može kupiti ako svaka čokoladica košta 4 kune?

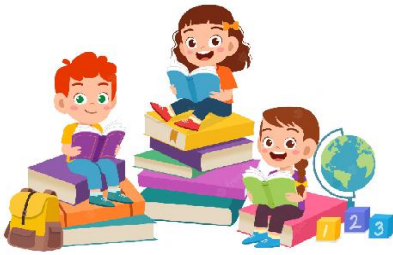
2.) Izračunaj izraz:

$$(100 - 23 - 13) : 8 + (42 : 6 + 18 : 9) \cdot 8 =$$

3.) U mojem dvorištu nalazi se 30 nogu. U dvorištu se nalaze samo psi i djeca. Koliko bi djece i pasa moglo biti u dvorištu?



### Prilog 3 – zadaci za treći razred



1.) Iva, Nika i Jure su troje prijatelja. Svatko od njih je digao po jednu knjigu u knjižnici. Iva je uzela knjigu od 457 stranica, njena knjiga je za 129 stranica veća od Jurine. Koliko stranica ima Jurina knjiga?

a) Nika je uzela najmanju knjigu. Njena knjiga ima 4 puta manje stranica nego Jurina. Koliko stranica ima Nikina knjiga?

b) Ivi je za pročitati ostalo još 298 stranica knjige. Koliko ih je do sada pročitao?

c) Ako je Jure pročitao 164 stranice svoje knjige tko je od njih dvoje više pročitao?

2.) Izračunaj izraz:

$$(658 + 281 - 5) : 3 - (756 - 68 \cdot 7) : 4 =$$

3.) Štand za prodaju sladoleda ima 5 različitih okusa na izbor. Na štand je došlo nekoliko djece i svako dijete je kupilo po dvije kuglice sladoleda kombinirajući različite okuse. Svako dijete je izabralo različitu kombinaciju okusa i sve moguće kombinacije su uzete. Koliko je djece kupovalo sladoled?





## Prilog 4 – zadaci za četvrti razred

1.) Na željezničkoj postaju pristižu vlakovi. Vlak broj **3** trebao je na postaji biti u 8:35, ali kasno je 17 minuta. Kada je vlak broj **3** stigao na željezničku postaju?



a) Vlak broj **7** na postaju dolazi 23 minuta nakon vlaka broj **3** te tako kasni 8 minuta. Kada je vlak broj **7** došao na postaju, a kada je po rasporedu trebao stići?

b) Vlak broj **11** na postaju je stigao u 10:23 te tako uranio 7 minuta u odnosu na raspored. Vlak je prema rasporedu nakon dolaska trebao imati stanku od 15 minuta te krenuti na drugu vožnju. Kada je treba krenuti druga vožnja?

2.) Izračunaj izraz:

$$(412857 : 9 - 3 \cdot 12582) + (346907 : 47) =$$

3.) Aurora i njezina mama su išle u kupnju u petak. Kupile su po barem jedan predmet iz svakog od tri odjela koje su posjetile. Aurora i mama su dale blagajniku 1200 kn i za ostatak dobile više od 100 kuna. Koje predmete su Aurora i mama kupile?



**KUĆANSKE POTREPŠTINE:**

Tablete za perilicu suđa	111 kn
Zavijese	120 kn
Tepisi za kupaonicu	290 kn

**ODJEĆA:**

Suknja	305 kn
Hlače	480 kn
Košulja	396 kn

**ALAT:**

Čekić	89 kn
Bušilica	257 kn
Pila	186 kn

## 13.) ŽIVOTOPIS

### ANA GULIĆ

**Datum i mjesto rođenja:** 19. kolovoza 1998. ,Sinj

**Adresa:** Glavice 662, 21230, Sinj

**Broj mobitela:** 091 764 1850

**E-mail:** [anagulic47@gmail.com](mailto:anagulic47@gmail.com)

#### **Obrazovanje:**

◇ *Osnovna škola Ivana Lovrića*, Glavice i Sinj (rujan 2005 – lipanj 2013)

◇ *Srednja strukovna škola bana Josipa Jelačića*- smjer ekonomist, Sinj (rujan 2013 – lipanj 2017)

◇ *Sveučilište u Zadru – Integrirani preddiplomski i diplomski učiteljski studij* (listopad 2017 - danas)

#### **Stručna praksa i volontiranje:**

◇ Suradnja vrtića i škole (u programu predškole) – *Dječji vrtić Grigor Vitez*, Zadar

◇ Stručna pedagoška praksa – *Osnovna škola Zadarski otoci*, Zadar

◇ Volontiranje u programu poludnevnog boravka – *Osnovna škola Krune Krstića*, Zadar

#### **Znanja i vještine:**

◇ poznavanje stranih jezika: engleski (vrlo dobro) i talijanski jezik (osnovno)

◇ osnove rada na računalu, radu Microsoft Wordu, Power Pointu i Excelu

◇ Vozačka dozvola B kategorije