

# Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj

---

Šitum, Mara

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zadar / Sveučilište u Zadru**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:162:578241>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-08**



**Sveučilište u Zadru**  
Universitas Studiorum  
Jadertina | 1396 | 2002 |

Repository / Repozitorij:

[University of Zadar Institutional Repository](#)



Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za razrednu nastavu  
Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

**Mara Šitum**

**Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod  
studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj**

**Diplomski rad**

Zadar, 2020.

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za razrednu nastavu  
Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

# **Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj**

Diplomski rad

Student/ica:

Mara Šitum

Mentor/ica:

Doc.dr.sc. Maja Cindrić

Zadar, 2020.



## Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, **Mara Šitum**, ovime izjavljujem da je moj **diplomski** rad pod naslovom **Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj** rezultat mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Ni jedan dio mojega rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mojega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada.

Zadar, 2020.

## ZAHVALA

*Zahvaljujem se svojoj mentorici doc.dr.sc. Maji Cindrić na pomoći i savjetima za izradu ovog diplomskog rada, kao i profesorima Odjela za izobrazbu učitelja i odgojitelja koji su svojim primjerom budili motivaciju u meni.*

*Hvala svim mojim prijateljicama na neizmjerne podršci, onima od najranijih doba s kojima sam zajedno sanjala i odrastala, kao i onima s kojima me je Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja spojio za cijeli život, s njima su studentski dani bili nezaboravni.*

*Zahvaljujem cijeloj mojoj obitelji i kumi na potpori i savjetima kroz cijeli moj život.*

*Posebno hvala mojim roditeljima i bratu koji su mi omogućili da postanem onakva kakva sam danas i koji su me uvijek podupirali u svim mojim snovima i odlukama, bez njih ne bih bila tu. Hvala mom bratu na svakodnevnim šalama i pjesmama, uz koje su i teži i zaposleniji učenjem dani postali zabavni.*

*Hvala dragom Bogu što me je blagoslovio time da imam ove ljude u svom životu i hvala Mu na svakoj prilici koju mi je pružio.*

## SADRŽAJ

1. UVOD .....	9
2. ŠTO NAZIVAMO PROBLEMSKIM ZADATKOM.....	11
3. PROBLEMSKI ZADACI UNUTAR POJEDINIH KLASIFIKACIJA ZADATAKA....	13
3.1. WORD PROBLEMS .....	14
a) Pridruživanje .....	15
b) Odvajanje .....	15
c) Dio- dio cjelina .....	16
d) Uspoređivanje .....	16
3.2. QUASAR.....	17
3.3. TTML .....	18
4. PROBLEMSKI MATEMATIČKI ZADACI KROZ POVIJEST MATEMATIKE .....	20
5. PROBLEMSKI MATEMATIČKI ZADACI U NASTAVI MATEMATIKE NIŽIH RAZREDA .....	23
6. PROBLEMSKI ZADACI U OKVIRU VANJSKIH VREDNOVANJA.....	27
6.1. TIMSS .....	27
6.2. PISA.....	29
7. SUSTAV MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA U REPUBLICI HRVATSKOJ I ČEŠKOJ REPUBLICI.....	31
7.1. Matematika u nižem osnovnoškolskom obrazovnju Češke Republike i Republike Hrvatske .....	32
7.1.1. Hejny metoda rješavanja problemskih zadataka na Karlovom sveučilištu .....	33
8. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA .....	37
8.1. Problem istraživanja .....	37
8.2. Instrument istraživanja i uzorak .....	37
8.3. Rezultati istraživanja .....	38

8.4. Rasprava .....	48
9. ZAKLJUČAK .....	50
10. LITERATURA.....	51
11. PRILOG- upitnik.....	54
12. ŽIVOTOPIS .....	56

## SAŽETAK

### Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj

U ovom diplomskom rad provedeno je istraživanje o rješavanju problemskih zadataka studenata Učiteljskog studija u Republici Hrvatskoj i u Češkoj Republici. Pojašnjen je i pojam problemskog zadatka, kao i njihova važnost pri oblikovanju učenikovih matematičkih kompetencija. Problemski zadaci su klasificirani unutar Word problems kategorije, kao i unutar projekata QUASAR i TTML. Kontekst matematike i problemskih zadataka prikazan je u povijesnom kontekstu, kako se problemski zadatak razvijao kroz povijest matematike. Prikazani su i rezultati PISA i TIMSS vanjskih vrednovanja posljednjih nekoliko godina za Republiku Hrvatsku i Češku Republiku. Navedene su i neke metode rješavanja problemskih zadataka, uključujući četiri koraka Georga Polye te Descartseov pokušaj pronalaska univerzalne metode rješavanja problemskih zadataka. Metode su prikazane samo kao jedan od primjera, to jest, smjernice koje mogu pomoći u općem oblikovanju, nisu univerzalne za svaki zadatak. Predstavljen je i okvirni program školovanja u Hrvatskoj i Češkoj, kao i matematika kao predmet u školi. Uz to, predstavljena je i Hejny metoda rješavanja problemskih zadataka specifična za studente Karlovog sveučilišta u Češkoj.

Provedeno istraživanje nije pokazalo da postoji nekih velikih razlika u rješavanju problemskih zadataka kod studenata u Hrvatskoj i Češkoj. Većinom su ispitanici odabirali iste ili slične metode pri rješavanju problemskih zadataka.

Ključne riječi: problemski zadatak, matematika, klasifikacija problemskih zadataka, Republika Hrvatska, Češka Republika



## SUMMARY

### Comparison of solving problem solving tasks by students of Teachers Education studies at Croatia and Czech Republic

This thesis presents a research about solving problem tasks of students of Teacher Education in the Republic of Croatia and in the Czech Republic. The term of a problem task is also explained, as well as their importance in shaping students' mathematical competencies. Problem tasks are classified within the Word problems category, as well as within the QUASAR and TTML projects. The context of mathematics and problem tasks is presented in a historical context, as the problem task has evolved throughout the history of mathematics. The results of PISA and TIMSS external evaluations in the last few years for the Republic of Croatia and the Czech Republic are also presented. Some problem-solving methods are also listed, including Georg Polya's four steps and Descartes's attempt to find a universal problem-solving method. The methods are presented as just one example, guideline that can help with general design, they are not universal for every task. The framework program of schooling in Croatia and the Czech Republic was also presented, as well as mathematics as a subject in school. In addition, the Hejny problem-solving method specific to students at Charles University in the Czech Republic was presented.

The conducted research did not show that there are any big differences in solving problem tasks for students in Croatia and the Czech Republic. Most of the respondents chose the same or similar methods in solving problem tasks.

Key words: problem solving tasks, Mathematics, classification of problem solving tasks, Republic of Croatia, Czech Republic

## 1. UVOD

Mnogi percipiraju matematiku kao da je to predmet koji se sastoji od pravila pomoću kojih se rješavaju zadaci, kada naučiš pravila, znaš i rješavati matematičke zadatke, međutim to nije tako. Učenici često upadaju u zamku rješavanja procedura što nije dobro za razvijanje njihovih matematičkih kompetencija. Problemski zadaci zato daju posebnu vrijednost matematičarima. Radom na problemskim zadacima razvijaju se procesne vještine, kreativnost, sigurnost u nepredviđeni ishod i mnoge druge. Katkad problemski zadaci stvaraju problem i jednoj većini budućih učitelja jer nisu bili upoznati s načinima rješavanja takvih zadataka ili ih nisu dovoljno riješili kroz svoje školovanje. Dok je toj polovici studenata logičko mišljenje i zaključivanje nejasno i nezanimljivo, druga polovica se zainteresira te joj je zanimljivo iskušavati i trenirati mozak za smišljanje različitih načina rješavanja. Te razlike potiču na razmišljanje o učestalosti rješavanja ovakvih zadataka u osnovnoškolskoj praksi, kao i o vrsti zadataka, načinima rješavanja te teorijama matematike koje se mogu povezati s problemskim zadacima. O formulacijama problemskih zadataka, matematičar Joseph B. W. Yeo (2007) je otvorio nekoliko pitanja, od kojih se u ovom radu izdvajaju dva; što znači pojam „matematički problem“ i o značenju „otvorenog i zatvorenog“ tipa zadatka. On stavlja naglasak na to da učenik treba dobro razumjeti zadatak i jasno definirati cilj koji želi postići i onda neće biti problema pri rješavanju.

Pri istraživanju prethodnih istraživanja, ponajviše su se spominjala dva matematička projekta (QUASAR i TTML). QUASAR se temeljio na tome da svi učenici nemaju jednake uvjete za učenje matematike (siromašnije i bogatije sredine) te ako budu imali jednake uvjete, da će i rezultati onih lošijih biti bolji. Zaključili su da su problemski zadaci bili najteži za rješavati, ali kod učestalog rješavanja tih zadataka i vježbanja, vidi se napredak. Iako problemski zadaci nemaju jednu formulu koju treba izvježbati da se nauči, stalnim radom i razmišljanjem može se poboljšati rješavanje. TTML projekt je istražio tri tipa zadataka od kojih je jedan bio problemski tip. Oni su zaključili da rješavanje problemskih zadataka iziskuje više vremena i da je o negativna strana, ali su dali prednost razgovoru i raspravi o strategijama rješavanja. To i je najzanimljivije kod problemskih zadataka. Svi će učenici dobiti isti zadatak, ali ga neće svatko riješiti na isti način. Ovom diplomskom radu cilj je bio istražiti načine rješavanja među studentima koji su se već susreli s ovakvim zadacima.

Autorica ovog diplomskog rada bila je na razmjeni studenata u sklopu Erasmus + programa u Češkoj republici i htjela je to iskoristiti za svoj rad. Studenti koji su sudjelovali u

istraživanju bili su studenti učiteljskog studija Sveučilišta u Zadru i studenti Karlovog sveučilišta u Pragu. PISA i TIMSS su istraživanja vezana za matematiku u kojoj redovito sudjeluju i Hrvatska i Češka. Pri usporedbi rezultata posljednjih dvaju PISA i TIMSS istraživanja, Češka republika je bila bolja od Republike Hrvatske. Treba se i naglasiti da obje države iz godine u godinu postižu sve bolje rezultate usporedno s prethodnima. Pri usporedbi školstva Republike Hrvatske i Češke republike, došlo je do zaključka kako su po tom pitanju ove dvije države jako slične, ali postoje i određene razlike. Studenti Karlovog sveučilišta su jedini koji u svome školovanju koriste tzv. HEJNY metodu poučavanja matematike. Tu metodu je smislio profesor koji im predaje na sveučilištu te ju oni koriste u praksi. Cilj ovog diplomskog istraživanja bio je usporediti razlike u principima rješavanja matematičkih zadataka problemskog tipa kod studenata Učiteljskog studija na Sveučilištu u Zadru i studenata Učiteljskog studija na Karlovom sveučilištu u Pragu putem upitnika. Zbog novonastale situacije izazvane virusom Covid-19, sveučilišta su bila zatvorena i upitnik se proveo online putem.

## 2. ŠTO NAZIVAMO PROBLEMSKIM ZADATKOM

Pojam „problem“ čest je u svakodnevnom životu. Sama riječ se pojašnjava kao “teorijsko ili praktično pitanje koje treba riješiti, sporno pitanje, teškoća, težak zadatak, zagonetka”. (Kurnik, 2002) Dio naše svakodnevnice su često situacije problemskog tipa koje trebamo razriješiti, međutim, ovdje stavljamo naglasak na probleme koje susrećemo u svijetu matematike. Postavljanjem „problema“, učitelj želi podići razinu poznavanja matematike kod učenika, a to može učiniti na nekoliko načina. Jedan od načina je da učitelj postavi neki zadatak i da učenici sami trebaju shvatiti i interpretirati problem, drugi način je da učitelj jasno definira problem učenicima i oni ga samo trebaju riješiti. Kod obrade novog gradiva, učitelj može postaviti problemsku situaciju pomoću gradiva koje učenici već poznaju te ih pomoću već naučenog uvedu u novo gradivo.

Pri spomeni izraza problemski zadatak, često se odmah učenici postave u obrambeni stav „ja to ne mogu“, „ja to ne znam“. Kroz obrazovanje, takvi su zadaci često neželjeni od strane učenika jer ih smatraju teškima, ali koji se zadaci zapravo mogu nazvati problemskim? Joseph B. W. Yeo (2007) u svome članku „Matheatical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment“ se pita što uopće pojam „matematički problem“ znači. Yeo navodi prema Hendersonu i Pingryju (1953) tri neophodna uvjeta za situaciju da postane problem za individualca.

Po njemu bi prvi uvjet bio da individualac ima jasno definiran cilj kojeg je svjesno svjestan i čije dostignuće želi. Drugi uvjet bi bio da kada se pojavi nešto što blokira put prema cilju, neka poteškoća i ako sposobnosti individualca nisu dovoljnije za otklanjanje poteškoće. Treći uvjet vodi k promišljanju kada individualac postane svjestan problema, jasno ili manje jasno ga definira, postavi različite hipoteze tj. rješenja problema i testira izvodljivost osmišljenog.

„Problemski zadatak je svaki zadatak za koji osoba koja ga rješava nema unaprijed ponuđenu metodu ili proceduru koju jednostavno primjenjuje, već samo rješavanje iziskuje iznalaženje metoda, kao i samog rješenja.“ (Schoenfeld, 1985) Ovo je prva definicija problemskog zadatka koju je do matematičar Alan Schoenfeld 1985.godine. On naglašava da su problemski zadaci bitni za lakše i brže učenje matematike te da se pomoću njih matematika učinkovitije uči.

Yeo (2007) otvara i pitanje značenja „otvorenog i zatvorenog tipa zadatka“. Zatvoreni tip zadatka je zadatak u kojem su i cilj i odgovor zatvoreni: cilj je naveden u samome zadatku i postoji samo jedno točno rješenje. Takvi tipovi zadataka najčešći su u zbirkama i radnim bilježnicama iz matematike i glavni cilj im je da učenici poboljšaju proceduralne vještine, ali mnogi učitelji smatraju da ovakvi tipovi zadataka mogu ograničavati učenike kod novih, nepoznatih situacija/ zadataka. Što se tiče otvorenog tipa zadatka, postoji nekoliko opcija. To mogu biti zadaci kod kojih postoji više rješenja, zadaci kod kojih postoji više važećih rješenja, zadaci kod kojih cilj nije točno određen. Yeo zaključuje kako, ukoliko je zadatak otvoren, mora biti više metoda za rješavanje, ali te metode moraju sadržavati više strategija za rješavanje, nego postupaka.

U navedenom članku, autor razlikuje tri tipa otvorenosti zadatka.

Otvorenost koja ovisi o studentu je prvi tip. Problemski zadaci su otvoreni u smislu da postoji više metoda za rješenje i one mogu biti proširene, samo što ovo ovisi o učeniku; ako on ili ona ne koristi više metoda, neće biti kažnjen/a. Drugi tip bi bio da je otvorenost utvrđena u samom zadatku. Zadaci kod kojih se istražuje imaju otvoren cilj i otvoren odgovor, pa ako učenik da samo jedan odgovor, a postoji više točnih odgovora, učenik može biti kažnjen. Treći tip je taj kod kojeg otvorenost ovisi o strukturi napisanog zadatka. Ukoliko je zadatak dovoljno složen i ne postoji skela u tekstu zadatka po kojoj se zadatak treba riješiti, onda je zadatak otvorenog tipa.

Nije svaki problemski zadatak takav za svaku osobu. To ovisi o razini matematičkog znanja određene osobe. Na primjer zadatak „*Jelena je kupila 3 čokolade i potrošila je 33 kune. Koliko kuna košta jedna čokolada?*“ je za učenika šestog razreda prilično jednostavan, dok je za učenike prvog razreda problemski jer njihovo matematičko znanje nije još uvijek te razine. Zbog toga se problemski matematički zadaci gledaju kao takvi ovisno o dobi i razini matematičkog znanja pojedine osobe. Na spomen problemskog zadatka najčešće se pomisli na sve zadatke riječima, što nije točno. Za usavršavanje matematičkih koncepata, važno je klasificirati problemske zadatke.

### 3. PROBLEMSKI ZADACI UNUTAR POJEDINIH KLASIFIKACIJA ZADATAKA

Predodžba učenika je najčešće da su svaki zadaci riječima problemski zadaci te da svaki problemski zadaci moraju biti napisani riječima, no to nije tako. Za problemske zadatke nije dostupan jedan „kalup“, formula ili određeni postupak koji je univerzalan i može pomoći pri svakom zadatku, već se zadacima problemskog tipa usmjerava na korištenje raznih strategija, na logično mišljenje i zaključivanje, kreativnost te na veće kognitivne napore.

„Rješavanje problemskih zadataka je proces koji uključuje nekoliko uzajamno povezanih procesa: prepoznavanje prisutnosti problema, formuliranje problema, primjenu različitih strategija za rješavanje problema, rješavanje problema, provjeru i tumačenje rezultata i konačno uopćavanje odgovora.“ (Sharma, 2001)

Prema Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović (1998) važno je razlikovati problemske zadatke, prepoznati spoznajne zahtjeve koje ti zadaci stavljaju djeci te je vrlo važno sustavno proučavanje raznih vrsta zadataka da bi se nastava što bolje prilagodila djeci raznih uzrasta. Iste autorice ističu psihologijsku klasifikaciju problemskih zadataka zbrajanja i oduzimanja koju su uveli Riley i suradnici. Vlahović-Štetić, Vizek Vidović (1998) prema Riley i suradnicima (1983) navode da se problemski zadaci mogu svrstati u tri kategorije u koje spadaju zadaci kombiniranja, zadaci promjene i zadaci usporedbe.

Vrsta zadatka	Primjer zadatka	Nepoznata količina
<b>Kombiniranje</b>		
K1	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K2	Ivan i Petar imaju nekoliko pikula. Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima nekoliko pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K4	Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
K5	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima 3 pikule. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K6	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
<b>Promjena</b>		
P1	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P2	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao Petru 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P3	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao nekoliko pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko mu je pikula dao Petar?	mijenjajući skup
P4	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao nekoliko pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula dao Petru?	mijenjajući skup
P5	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
P6	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda je dao 5 pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
<b>Usporedba</b>		
U1	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula više ima Ivan od Petra?	razlika skupova
U2	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula manje ima Petar od Ivana?	razlika skupova
U3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula više od Ivana. Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U4	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula manje od Ivana? Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U5	Ivan ima 8 pikula. On ima 5 pikula više od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup
U6	Ivan ima 3 pikule. On ima 5 pikula manje od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup

Slika 1.- Kategorije problemskih zadataka prema Riley i suradnici (1983), preuzeto 10.10.2020.

Svaki od ovih zadataka definira određene količine te postoji odnos između više količina. Vlahović-Štetić, Vizek Vidović (1998) prema Riley i suradnici (1983) pojašnjavaju da je kod zadataka kombiniranja riječ o dva skupa koje treba ujediniti ili razjediniti, kod zadataka promjene zbrajanje ili oduzimanje uzrokuje uvećanje ili umanjenje početne količine, a kod zadataka usporedbe postoje dva statična skupa među kojima je potrebno pronaći razliku. Unutar svake od ove tri glavne skupine zadataka postoje i dodatne podjele s obzirom na položaj nepoznate količine.

Sličnu klasifikaciju proveli su autori Thomas P. Carpenter i suradnici (2015) u knjizi „Children's Mathematics – Cognitively Guided Instruction“ gdje navode kako postoje četiri osnovne vrste problema: pridruživanje, odvajanje, dio-dio cjelina i uspoređivanje te se taj projekt naziva Word problems. Uz Word problems, opće prihvaćene klasifikacije problemskih zadataka dolaze i iz projekata QUASAR te TTML. Autori QUASAR projekta dijele zadatke u dvije kategorije: manje zahtjevni zadaci i više zahtjevni zadaci. Zadaci koji su manje zahtjevni obuhvaćaju pamćenje, reprodukciju te proceduralno znanje bez povezivanja, dok zadaci koji su više zahtjevni obuhvaćaju matematičko rezoniranje te proceduralno znanje uz povezivanje. (Silver i suradnici, 1996) Dok QUASAR projekt dijeli problemske zadatke na dvije vrste, TTML projekt ih dijeli na tri različita tipa zadataka. Prvi tip zadatka je klasični matematički zadatak čija je svrha jasna i definirana, drugi tip zadatka stavlja matematički problem u koncept praktičnog, svakodnevnog, dok je treći tip zadatka otvorenog tipa, postupak mu nije unaprijed određen. (Sullivan i suradnici, 2009)

### 3.1. WORD PROBLEMS

Klasifikacija World problems iz knjige „Children's Mathematics – Cognitively Guided Instruction“ autora Thomasa P. Carpentera, Elizabeth Fennema, Megan Loef Franke, Linda Levi i Susan B, Empson je najčešće korištena u svijetu matematike. Ova klasifikacija odnosi se na samu radnju opisanu u zadatku kao i veze koje su opisane u problemu. Upravo zbog toga ova klasifikacija je najviše primijenjena djeci. Ne koriste svi iste strategije i ideje preko kojih će doći do rješenja. Svako dijete drukčije percipira zadatak i razmišlja o njemu, te je to i bila motivacija autorima napraviti ovu vrstu klasifikacije.

Što se tiče zbrajanja i oduzimanja, postoje četiri osnovne vrste problema: *Pridruživanje, Odvajanje, Dio- dio cjelina i Uspoređivanje.*

Kod Pridruživanja i Odvajanja imamo slične, ali suprotne akcije. Pridruživanjem se elementi dodaju na zadani skup, a Odvajanjem se elementi oduzimaju od zadanog skupa.

Kod Dio-dio-cjeline gleda se povezanost između skupa i njegova dva podskupa, dok se Uspoređivanje odnosi na usporedbu između dva nesparena, odvojena skupa. Unutar svakog zadatka, možemo razlikovati razne vrste problema, ovisno o nepoznatoj vrijednosti.

a) Pridruživanje

Problem pridruživanja sadrži neku direktnu radnju, u kojoj se nešto povećava.

*Primjer: Antea ima četiri jabuke i prijateljica Sara joj je dala još dvije jabuke. Koliko jabuka sada ima Antea?*

Ovaj zadatak se sastoji od tri vrijednosti. Prva vrijednost nam je poznata i to je početna količina (*Antea ima četiri jabuke*). Druga vrijednosti (*Sara joj je dala još dvije jabuke*) se pridružuje početnoj i daje nam treću i završnu vrijednost (*Antea sada ima šest jabuka*) što je i rješenje zadatka.

Ovakav tip zadatka može imati tri varijacije- nepoznat rezultat, nepoznata promjena i nepoznat početak.

*Primjeri:*

Nepoznat rezultat: Bernarda ima pet balona, David joj je dao još tri balona. Koliko balona sada ima Bernarda?

Nepoznata promjena: Bernarda je imala pet balona. David joj je poklonio još nekoliko balona za imendan pa Bernarda sada ima osam balona. Koliko je balona David poklonio Bernardi za imendan?

Nepoznat početak: Bernarda je imala nekoliko balona. David joj je za imendan poklonio tri balona i ona sada ima sveukupno osam balona. Koliko balona je Bernarda imala prije imendana?

b) Odvajanje

Problem Odvajanja, kao i problem pridruživanja sadrži direktnu radnju, samo se kod odvajanja količina smanjuje. Također, zadaci sadrže po tri vrijednosti od kojih je jedna nepoznata. Kod problema Odvajanja također nailazimo i na tri varijacije- nepoznat rezultat, nepoznata promjena i nepoznat početak.



*Primjeri:*

Nepoznat rezultat: Mario ima sedam autića i tri autića je poklonio rođaku Frani. Koliko autića sada ima Mario?

Nepoznata promjena: Mario je imao sedam autića i nekoliko autića je poklonio rođaku Frani. Ako Mario sada ima četiri autića, koliko ih je poklonio rođaku Frani?

Nepoznat početak: Mario je imao nekoliko autića. Rođaku Frani je poklonio tri autića. Mario sada ima četiri autića. Koliko autića je Mario imao prije nego je poklonio tri rođaku Frani?

c) Dio- dio cjelina

Za razliku od Pridruživanja i Odvajanja, Dio- dio- cjelina kao vrsta problema je statična te nema neke direktne radnje. Kod ove vrste dolazi do statične veze između specifičnog skupa i njegova dva podskupa. Postoje dvije vrste Dio-dio-cjelina problema, a to su da je cjelina nepoznata ili da je samo dio nepoznat.

*Primjeri:*

Cjelina nepoznata: U košari se nalazi šest jabuka i dvije kruške. Koliko voća se nalazi u košari?

Dio nepoznat: Osam komada voća se nalazi u košari. Šest od osam komada su jabuke, a ostalo su kruške. Koliko kruški se nalazi u košari?

d) Uspoređivanje

Kao što je slučaj u Dio-dio-cjelina, ova vrsta problema je statična i ne sadrži određenu akciju nego sadži veze između vrijednosti. Uspoređivanje uključuje usporedbu dva različita i odvojena skupa. Jedan skup naziva se referentni skup, a drugi skup se naziva usporedni skup. Razlika ili količina je vrijednost za koju jedan skup premašuje drugi. Postoje tri varijane problema- nepoznata razlika između skupova, nepoznati usporedni skup i nepoznat referentni skup.

Petra ima tri godine.

REFERENTNI SKUP

Josip ima osam godina.

USPOREDNI SKUP

Josip ima pet godina više od Petre.

RAZLIKA/ KOLIČINA

*Primjeri:*

Nepoznata razlika između skupova: Petra ima tri godine. Josip ima osam godina. Koliko više godina ima Josip od Petre?

Nepoznati usporedni skup: Petra ima tri godine. Josip ima pet godina više od Petre. Koliko godina ima Josip?

Nepoznati referentni skup: Josip ima osam godina. On ima pet godina više od Petre. Koliko godina ima Petra?

### 3.2. QUASAR

QUASAR projekt (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), što u prijevodu na hrvatski znači Kvantitativno razumijevanje: proširivanje učeničkih postignuća i razumijevanja. *Ford foundation* je organizirao ovaj projekt školske godine 1990/1991 te je projekt trajao pet godina od vodstvom sveučilišnog profesora Edwarda Silvera. Prvo su bile uključene četiri škole u Americi pa su im se pridružile još dvije škole, također iz Amerike. Cilj ovog projekta bio je pomoći učenicima shvatiti matematiku i matematičke koncepte rješavajući zahtjevnije zadatke, uz raspravu o tim zadacima.

Projekt se temeljio na pretpostavci da svi učenici mogu rješavati teže matematičke zadatke ako imaju kvalitetne upute i uvjete za rad. Smatralo se da niski uspjeh u matematici kod siromašnijih učenika nije zbog njihovih nedovoljnih kompetencija, već zbog obrazovne prakse koja nije dovoljno kvalitetna.

Prema Wei- Min Hsu (2000), Stein, Smith, Henningsen i Silver su 2000. godine klasificirali zadatke na četiri razine: memoriranje, postupci bez povezanosti, postupci s povezanosti te rješavanje matematike. Prve dvije razine ove podjele traže samo pamćenje, odnosno, primjenu pravila koja vrijede kako bi točno riješili zadano. Razumijevanje koncepata nije traženo u ove dvije razine. Za druge dvije razine potrebna je veća kognitivna sposobnost, kao i poznavanje koncepata i ideja. Za zadatke iz ove faze potrebno je precizno odrediti koju strategiju koristiti pri rješavanju te se učenici trebaju koristiti indukcijom, dedukcijom i dokazivanjem.

QUASAR istraživanje je pokazalo da su problemski zadaci, oni koji zahtijevaju logičko razmišljanje, najteži za rješavanje, da učestalim rješavanjem problemskih matematičkih zadataka učenici dolaze do najvećih postignuća.

### 3.3. TTML

TTML projekt (Task Types in Mathematics Learning) u prijevodu na hrvatski jezik znači Tipovi zadataka i matematičko učenje. Doug Clarke, Peter Sullivan i Barbara Clarke su u suradnji s učiteljima radili na ovom istraživanju. Istraživali su najbolje načine korištenja matematičkih zadataka te kako tipovi određenih zadataka doprinose učenju. Istraživanje je trajalo tri godine.

U ovom istraživanju, zadaci su podijeljeni na tri tipa zadataka, a autori su radili tako da je svakome od njih dodijeljen jedan od ta tri tipa i jedna škola za koju su bili zaduženi.

Prvi tip zadatka „Models“ je klasični zadatak u kojemu učitelji koriste već odabrani model, daju neki primjer ili objasne zadatak. Matematika je pojednostavljena u ovom tipu zadatka. Učitelji koji su koristili ovaj tip, ističu pozitivno za ovaj tip zadatka, kao što je da ti zadaci dopuštaju izravno poučavanje te učenicima pružaju mogućnost usavršavanja osnovnih matematičkih vještina. Negativno bi bilo to što bi ovakvi zadaci učenicima vrlo brzo dosadili.

Primjer za prvi tip zadatka: Izračunaj koliko je  $5+6+3-1$ .

Drugi tip zadatka „Contextual“ stavlja matematički problem u kontekst stvarnosti, to jest u kontekst stvarnoga svijeta. Predstavlja matematiku kao dio svakodnevnice i stalne potrebe. Učitelji koji su koristili ovaj tip, primjećuju kako je učenicima bilo jako zanimljivo rješavanje i pronalaženje rješenja za ovakve zadatke te bi dobivali razne ideje koje bi im pomogle doći do rješenja. S druge strane, učenicima je trebalo puno duže za riješiti zadatke ovog tipa te im je bilo teško započeti s rješavanjem.

Primjer za drugi tip zadatka: Klara je išla u dućan kupiti torbu. Torba koja joj se svidjela košta 152 kuna, a Klari su nedostajale 42 kune za kupiti torbu. Koliko kuna ima Klara?

U treći tip zadataka „Open-ended“ spadaju problemski zadaci otvorenog tipa. Učitelji su istaknuli nove strategije i razmjenu novih ideja o zadatku među učenicima kao pozitivnu stranu, a kao negativnu stranu istaknuli su količinu vremena koji ovi zadaci oduzimaju pri rješavanju, a školski sat matematike je ograničen.

Primjer za treći tip zadatka: Ivana je dobila dvije majice i doje hlače. Majice su joj u crvenoj i bijeloj boji, a hlače u plavoj i crnoj boji. Koliko kombinacija Ivana može obući od nove odjeće?

Nakon podjele zadataka prema prethodna tri projekta (Word problems, QUASAR, TTML) dolazi se do zaključka kako se dolazi do vrlo različitih problema i kočnica za djecu pri rješavanju različitih tipova zadataka. Važno je da učenici shvate da će poboljšati svoje vještine rješavanja takvih zadataka vježbanjem i ne odustajanjem kada odmah ne vide rješenje. Sama spoznaja i zadovoljstvo koje se osjeti kada se riješi neki malo teži zadatak je poticaj djeci da se i dalje zanimaju za takve zadatke i osmišljaju vlastite strategije i metode za svaki zadatak pojedinačno. To je i jedna od pozitivnih stvari problemskih zadataka, ne može dosaditi, već se isti zadatak najčešće da riješiti na nekoliko načina. Kako se matematika neprestano razvija, tako se razvija i metodika rješavanja zadataka. Tijekom vremena razvijale su se razne teze i teorije, kao o matematici, tako i o problemskim zadacima.

#### 4. PROBLEMSKI MATEMATIČKI ZADACI KROZ POVIJEST MATEMATIKE

Prateći povijest nastave matematike, nailazi se na različite teorije učenja i poučavanja. Pogledi na pristupe matematici oduvijek su se razlikovali od vremena do vremena, od čovjeka do čovjeka. Tijekom vremena razvile su se mnoge teorije o učenju matematike. Neke su se zasnivale na učenju kao misaonom procesu, neke na ponašanju učitelja kao važnog čimbenika u usvajanju matematike, a neke na više vanjskih faktora koji utječu na učenje.

Jedna od poznatijih teorija učenja je asocijacionistička teorija koju je razvio Edward Thorndike. Prema Rivera (1996), Thorndike je smatrao da je matematika skup navika ponašanja i da je sve u matematici povezano s navikom. On smatra da za osnaženje misaonih kompetencija treba uvježbavati algoritme i postupke. Novo gradivo postaje navika koja je povezana uz ranije naučenu naviku. Prema Rivera (1996), Thorndike je odredio tri zakona učenja. Prvi zakon, zakon ponavljanja drži da je navike potrebno ponavljati kako bi se sačuvale. Drugi zakon, zakon efekta ističe da su navike koje su povezane sa zadovoljstvom jače nego li one povezane s boli. Treći zakon, zakon brzine govori da ukoliko je prisutna veća brzina stvaranja veza između stvari, i zadovoljstvo je veće. Dakle, asocijacionisti stavljaju naglasak na uvježbavanju postupka rješavanja zadataka, ukoliko učenik nauči jedan po jedan korak procedure za riješiti zadatak, naučit će i matematiku. Na temelju toga su Bisanz i Dunn proveli istraživanje (prema Vizek- Vidović i sur.2014). „Autori su ispitanicima zadavali nizove zadataka u kojima je trebalo pribrojiti i oduzeti isti broj (npr.  $5+2-2$ ). Šestogodišnjaci i odrasli ispitanici nisu pri ovakvim zadacima računali zbroj i razliku, već su izravno davali rješenja. No devetogodišnjaci su sve računali vjerujući da u školi moraju uvijek računati. Oni su izračunali sve tražene operacije ( $5+2=7$ ,  $7-2=5$ ) Kod njih je naučeno izvođenje postupka imalo prednost pred razumijevanjem jednog od temeljnih načela – načela reverzibilnosti“.

1957.godine supružnici Dina i Pierre su razvili Van Hielov model te ga objavili u Nizozemskoj iste godine. Oni su uočili teškoće s kojima se učenici susreću pri rješavanju geometrijskih zadataka, a posebno kod izvedbe formule u tim zadacima. Prema Baranović i Cindrić (2015), teorija Van Hielea hijerarhijski strukturira karakteristike procesa mišljenja kroz pet razina. Svaku razinu naziva prema najvažnijoj karakteristici: vizualizacija, analiza, neformalna dedukcija, formalna dedukcija i strogost. Prema Van Hielovoj teoriji, učenici bi trebali riješiti što više zadataka sa nižih razina mišljenja kako bi što bolje razvili mišljenje na višim razinama. Kako bi učenik prešao iz jedne u drugu razinu, važno je prethodnu dobro shvatiti i znati primjeniti.

Za to vrijeme, 1950-ih godina u SAD-u je pokrenuta reforma obrazovanja zvana „New Math“ koja je nastala nakon što je USSR poslala „Sputnik“ u orbitu i tako se postavila kao najjača sila u to vrijeme. Amerikanci su se osjećali kao da zaostaju i da sada oni trebaju učiniti nešto veliko kao i USSR. Počelo se razmišljati o obrazovanju, kako potaknuti napredak obrazovanja i promijeniti kurikulum potaknuto time što kurikulum nije bio promijenjen preko 300 godina i kao rezultat toga 1960-ih i 1970-ih godina usvojen je novi kurikulum. Matematika se oduvijek učila vježbanjem i ponavljanjem sve dok se ne bi stekle željene vještine koje su se mogle nadograđivati. „Predstavnici „New Math“ pokreta su željeli da djeca uz osnovne matematičke koncepte odmah uče i koncepte višeg stupnja kako bi ih mogli povezati sa stvarnim rješavanjem problema. Na primjer, učenike su uz učenje tablice množenja poučavali kako pronaći koja je vrijednost nepoznanice „x“, učili su ih komutativnom zakonu, bez da su prošli osnove aritmetike.“ (Harris,2018) Tradicionalno učenje matematike bazira se na dekadski brojevni sustav, a predstavnici „New Math“ pristupa su pokazali učenicima da postoje i druge baze što je bilo jako zbunjujuće za učenike i roditelje. Učenici su učili zbrajati i množiti brojeve gledano po redoslijedu. Sredinom 1970-ih obrazovni stručnjaci su priznali da je „New Math“ bio neuspješan projekt te su koncept matematičkog kurikuluma vratili na onakvog kakav je bio prije.

Jedna od teorija koja je pridonijela učenju matematike je konstruktivizam. Prema toj teoriji, na znanje se gleda kao na rezultat aktivnog primanja informacija te da se informacije lakše primaju ako se odvija kroz socijalnu interakciju. „Svako učenje, pa tako i učenje matematike i prirodnih znanosti, odvija se kroz socijalnu interakciju tj. učenik će biti potaknut reakcijama drugih učenika“ (Vizek-Vidović i sur. 2014) Konstruktivisti su mišljenja da bi se učenici trebali naći u primjerima bogatoj okolini složenim situacijama i da će ih takve situacije potaknuti na kreativnije rješavanje problema. Prema Vizek- Vidović (2014.) učitelj treba ispuniti radni prostor za svoje učenike tijekom nastave matematike korištenjem raznih materijala poput kockica koje se mogu nadograditi jedna na drugu, štapića, sjemenki itd. što će potaknuti učenike da razmišljaju s razumijevanjem. Prema Piagetu (prema Rivera 1996.) dijete treba aktivno razumjeti problem, kako bi ga moglo spontano istražiti i doći do spoznaje, dakle, otkrivanje novog zaključka se ne smije djetetu odmah reći nego ga dijete samo treba pronaći i otkriti. Također Piaget tvrdi da ukoliko učenik stekne znanje tako što ga je samo istražilo, to znanje će onda moći i zadržati. Ove tvrdnje vrijede i za problemske zadatke koje djeca trebaju spontano istražiti kako bi došla do rješenja. Sam taj put otkrivanja otvara različite načine razmišljanja kod djece te kada sami dođu do spoznaje, osjećaju se uspješno i dobro jer su uspjeli riješiti problem.

Kao „nadopuna“ konstruktivizmu, nizozemski matematičar Hans Freudenthal ustanovio je pristup obrazovanju kojeg je nazvao Realistično matematičko obrazovanje (RMO). Taj pristup zauzima stav o matematici kao „ljudskoj aktivnosti“ koja treba biti povezana sa stvarnim svijetom te se tako približiti djeci. Prema Van den Heuvel-Panhuizen i Drijvers (2014), matematičar Treffers je predstavio šest principa ovog pristupa koji su se kasnije bili izmjenjivali, čak i sami Treffers ih je prilagodio- princip aktivnosti, princip realnosti, princip razine, princip međusobne povezanosti, princip interakcije te princip vođenja. Vođen konstruktivističkom teorijom, Freudenthal je ovim principima želio više povezati matematičke probleme sa stvarnim svijetom, da učenici aktivno sudjeluju u procesu učenja, da se matematički sadržaji poput na primjer brojeva i geometrije ne smiju izolirati, već integrirati, želio je potaknuti rasprave u razredu kao glavne pokretače razmišljanja i osmišljavanja različitih načina rješavanja problema. Freudenthal je stavio naglasak i na učitelja, kao glavnog pokretača učenja, da ne smije biti pasivan, već se truditi što više može da djeci približi matematiku na otvoren način.

Cilj matematike nije samo usvajanje gradiva takvo da djeca uče formule i metode rješavanja zadataka napamet, već je važno kako će doći do toga. „Suvremena nastava matematike postavlja i zahtijeva rješavanje dvaju važnih problema: problem razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti te problem odgovarajućeg osposobljavanja nastavnika matematike.“ (Kurnik 2009) Upravo su problemski zadaci odličan korak za razvitak stvaralačkog mišljenja. Kod tradicionalne nastave matematike, najčešće učitelji djeci predstave načine rješavanja zadataka, pokažu im formule koje trebaju naučiti i njihovu primjenu te je na djeci da to izvježbaju. Prema Cindrić (2019), kod suvremene nastave matematike, djeca sama uočavaju pravila te po tim pravilima konstruiraju znanja. Tako će učenici rješavanjem problemskih zadataka doći do učenja rezultata računskih radnji, što je u tradicionalnoj matematici obrnuto.

Učitelji su ti uz čiju pomoć se djeca upoznaju sa matematikom. Kada učenici krenu s učenjem matematike u nižim razredima osnovne škole, učitelji ih igrama uvode u nastavu matematike. Od prepoznavanja crta, brojeva, kroz igru uče matematičke osnove. Ne usvoji svaka generacija jednako određenu temu, a za svaku temu ima i težih i lakših zadataka. Kompetencije i vještine učenika određuju težinu zadataka, a učiteljev zadatak je to uvidjeti i prilagoditi djeci.

## 5. PROBLEMSKI MATEMATIČKI ZADACI U NASTAVI MATEMATIKE NIŽIH RAZREDA

Jako je važan pristup kojim učitelji, kao prve osobe koje upoznaju djecu s matematikom, prenose matematičko znanje djeci. Često se matematika smatra teškim i dosadnim predmetom samo zato što nije omiljeni određenim učiteljima. Tada i učenici stvaraju averziju prema matematici te ju označe kao tešku i odustanu od toga da ju uopće pokušaju shvatiti. Zbog toga je vrlo bitno da budući učitelji stvore pozitivnu sliku o matematici te ju grade i nadograđuju kada krenu raditi u školi. Matematika nije suhoparan predmet u kojem se stalno uči isto već njena čar i je u tome što se ono već naučeno nadograđuje novim gradivom i tako se stvara matematičko znanje. Problemska matematika je zahtjevna te za njenu primjenu treba utrošiti više vremena. Učitelji trebaju pronaći način kako pojednostaviti svaki zadatak da bude na djetetovoj razini. Često je učiteljima izazov prilagoditi se razini djeteta i na njima jednostavan način im prikazati zadatak.

Učiteljima bi najlakše bilo riješiti zadatak tipa „*Ante je kupio dvije jabuke i tri kruške te potrošio 13 kuna. Ako jedna jabuka košta za jednu kunu manje nego jedna kruška, koliko košta jedna kruška, a koliko košta jedna jabuka?*“ pomoću jednadžbe, međutim jednadžba nije prikladna za djecu nižih razreda osnovne škole te to nije adekvatan način za rješavanje ovog zadatka za tu skupinu učenika. Učitelj tada izlazi iz okvira svog znanja te se vraća na okvir djeteta. On mu treba pomoću slikovitog izraza, crteža, jednostavnog grafa, skice, pomoću štapića, kamenčića ili bilo kakvih drugih pomagala predočiti taj zadatak. Kada se gledaju standardni zadaci i metode rješavanja istih, postupak je najčešće unaprijed poznat, uvjeti i cilj su jasno određeni. Na drugu stranu, kod problemskih zadataka opisana je situacija koja ima dvije ili više nepoznate sastavnice te ne postoji unaprijed određena metoda rješavanja. Učenici se trebaju dobro skoncentrirati, treba biti prisutna kreativnost i mašta, kao i dosjetljivost i strpljivost. Učenici će razviti samopouzdanje za rješavanje novih „problema“ ukoliko samostalno dođu do rješenja nepoznatog zadatka.

„Rješavajući raznovrsne standardne i nestandardne zadatke učenici ovladavaju sve većim znanjem i stječu sve bolje iskustvo u toj djelatnosti. Međutim, sposobnost rješavanja problemskih zadataka razvija se uspješnije i brže ako oni to ne postižu samo rješavanjem velikog broja zadataka, već upoznavanjem i usvajanjem različitih metoda rješavanja zadataka.“ (Kurnik, 2000.)

Francuski matematičar Rene Descartes (prema Kurnik, 1999) je tragao za univerzalnom metodom rješavanja problema i uvidio je da nekakva univerzalna metoda nije moguća.



Međutim, osmislio je shemu koja nije u potpunosti dovršena, a prema Kurnik (1999) zvuči ovako:

1. Zadaća bilo kakve vrste se svodi na matematičku zadaću
2. Matematička zadaća bilo kakve vrste se svodi na algebarsku zadaću
3. Algebarska zadaća bilo kakve vrste se svodi na rješavanje jedinstvene jednadžbe

Descartes je shvatio da ovakva shema ne može biti univerzalna i koristiti se za baš svaki matematički zadatak pa je zato najvjerojatnije to ostalo nedovršeno.

Za razliku od Descartesa koji je želio pronaći univerzalnu metodu rješavanja zadataka, njegov mađarski kolega Georg Polya je dao model po kojem bi se mogli rješavati problemski zadaci. Polya, koji se u mladosti nije zanimao za matematiku, a prošao je i nekoliko različitih studija, poput prava, književnosti, latinskog jezika, mađarskog jezika te filozofije, na nagovor profesora filozofije, upisuje tečaj matematike i fizike te se „pronalazi“ u matematici i odlučuje nastaviti u tom smjeru. Problemski zadaci su ga zaintrigirali kada se susreo sa jednim svojim učenikom koji nikako nije mogao riješiti neke zadatke problemskog tipa, pa je Polya pronalazio metode rješavanja problema koje bi mu mogle pomoći. Zaključio je da nije urođena vještina za rješavanje problema, već da se to može naučiti. Sukladno tome, osmislio je četiri koraka za pomoć učenicima u rješavanju problema.

1. Razumijevanje zadatka- Polya-in prvi korak je da učenik treba shvatiti tekst zadatka. Nema smisla da učenik krene rješavati nešto što ne razumije. Iz zadatka treba proučiti što ima zadano, što mu je nepoznato i što se traži. Ukoliko to zadatak dopušta, učenik može i skicirati zadatak te si tako vizualno preočiti poznato i nepoznato. Kako bi učitelj bio siguran da učenik shvaća zadatak, može pitati učenika da zadatak ponovi svojim riječima, to jest da ga prepriča.
2. Stvaranje plana- Drugi korak za rješavanje problema uključuje nekoliko strategija koje mogu biti od pomoći. Učitelj može pomoći učenicima doći do ideje za rješavanje zadataka pitanjima poput je li se učenik ranije susreo sa sličnim zadatkom, je li iskoristio sve što je zadano, može li drugačije izraziti zadatak itd..Neke od strategija koje se mogu koristiti su da učenik nacrtá zadatak, da riješi jednadžbu, pronáde formulu, napravi simulaciju, nacrtá dijagram itd.
3. Izvršavanje plana- Važno je poticati učenike da dođu do ideje za plan svojim vlastitim naporima jer će im tako biti lakše izvršiti ga. Kada sami osmisle plan, oni već u svojoj glavi imaju potencijalno rješenje, to jest, provode zamišljene korake kako bi došli do rješenja. Nakon dobro osmišljenog plana, izvršavanje istoga bi trebalo biti lako.

4. Osvrt- „Osvrtom na gotovo rješenje, ponovnim razmatranjem i preispitivanjem rezultata i puta koji je do njega doveo, učenici bi mogli učvrstiti svoje znanje i povećati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka.“ (Polya, 1966) Promisliti o točnosti rješenja, o težini načina rješavanja te o samom postupku olakšava učenicima u shvaćanju više takvih tipova zadataka te lakšem rješavanju zadataka koji ih čekaju.

Navedeni koraci nisu univerzalni niti za svaki zadatak primjenjivi, oni mogu pomoći u općem oblikovanju. Učitelji ih mogu dati djeci kao formu koja nije neophodna, već jedan od mnogo načina koja trebaju usvojiti i znati primijeniti. Ovi koraci mogu biti korisni i kao smjernice učenicima za razvoj svojih matematičkih sposobnosti.

Za usavršavanje problemskih zadataka, važno je da djeca kroz svoje obrazovanje prođu kroz što više različitih vrsta istih. Često se učitelji oslanjaju na samo nekoliko primjera pa su im ti primjeri stalni i njima mijenjaju samo neke sastavnice. Problemski zadaci izvrstan su primjer zadataka za čije rješavanje se mogu koristiti razni pomoćni materijali poput štapića, kockica, papirića... „Istraživanja pokazuju da su djeca uspješnija ukoliko pri rješavanju zadataka crtaju, rabe štapiće ili kockice.“ (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović ,1998) Kada djeca imaju pomoćne materijale u rukama, lakše im je vizualizirati zadatak te ga je tako lakše i riješiti. Ne samo djeca, i učiteljima je zanimljivo poučavati na takav način. Oni nastavu mogu učiniti takvom da pomoću,na primjer, kockica ili štapića nauče djecu novom gradivu i to učine na djeci zanimljiv i zabavan način.

Jedan od didaktički korisnih materijala za nastavu matematike su i Cuisenaire štapići. Takvih štapića postoji deset te svaki simbolizira jedan broj od jedan do deset. Svaki štapić je različite boje i veličine. Uzmimo za primjer zadatak *Matija ima šest kuna, a njegov prijatelj ima 3 kune više, koliko kuna imaju zajedno?*. Ukoliko ima Cuisenaire štapiće, učenik se može potpomoći njima za riješiti zadatak. Može uzeti štapić koji označava broj šest i uzeti štapić koji označava broj tri te ih postaviti jedan iznad drugoga. Zatim učenik treba pronaći štapić koji veličinom odgovara tim dvama spojenim štapićima i u konačnici učenik dođe do štapića koji označava broj devet.

Ovaj zadatak se može riješiti i metodom grafičkog prikaza, to jest, učenik će nacrtati Matiju kako drži šest kuna uz prijatelja koji drži tri kune. U prvom i drugom razredu, ova metoda je najučestalija jer su tada djeci slikovnice i knjige koje sadrže slike vrlo bliske te se najčešće s time susreću.

Postoje različite strategije koje se mogu primjenjivati pri rješavanju problemskih zadataka, kod nekih se zadataka čak može i kombinirati više njih. Neke su strategije učestalije od drugih

i ne koriste sva djeca za isti zadatak iste strategije. Dobro je da, kod korištenja različitih strategija, djeca razmijene međusobno strategije koje su koristili zato što će tako druga djeca dobiti uvid u neki novi način, novu metodu. Na primjer zadatak *Matija je imao šest kuna i dao je nekoliko kuna prijatelju i sada Matija ima četiri kune. Koliko kuna je Matija dao prijatelju?* se može prikazati na nekoliko načina: jedno dijete može nacrtati šest kovanica i prekrižiti četiri pa prebrojiti prekriženo, drugo dijete može nacrtati četiri kovanice te nadodavati kovanice dok ne dođe do nacrtanih šest, treće dijete može nacrtati šest kovanica i u redu ispod toga četiri kovanice pa će vidjeti koliko kovanica nedostaje kako bi oba reda bila jednako ispunjena... Učitelj treba dati slobodu učenicima da sami otkriju kako će riješiti zadatak i kasnije im predstaviti još neke načine rješavanja uz raspravu takvu da svako dijete opiše svoj način. Problemski zadaci koje zadaju bi trebali biti povezani sa stvarnim životom i situacijama u kojima se dijete može naći jer će se tako lakše poistovijetiti sa zadatkom i ući u srž problema. Učiteljev zadatak je znati modelirati nastavu problemske matematike kako bi učenici razvili potrebne kompetencije, vještine i sposobnosti koje su im potrebne za snalaženje u svakodnevnom životu pri suočavanju sa nečim novim i nepoznatim. Rješavanjem problemskih zadataka razvijaju se procesne vještine, a učenici s vremenom dobivaju „sigurnost“ u nepredviđen ishod, znaju se snaći kada dobiju pred sebe nešto nepoznato te polako i smireno kreću u rješavanje problema. Kako bi se utvrdilo stečeno znanje, često se organiziraju razna školska, županijska i državna natjecanja kojima je u cilju ne samo dobiti uvid u matematičko znanje određene generacije, već i približiti matematiku učenicima na zabavan i izazovan način. Provedena su i razna međunarodna istraživanja, uključujući TIMSS i PISA istraživanja koja imaju u cilju istražiti metode koje određene države koriste pri rješavanju, između ostaloga, i zadataka problemskog tipa.

## 6. PROBLEMSKI ZADACI U OKVIRU VANJSKIH VREDNOVANJA

Obje države čiji studenti sudjeluju u ovom istraživanju su bili i sudionici PISA i TIMSS istraživanja koja se u velikoj mjeri sastoje od problemskih zadataka. Kao uvod usporedbi rezultata za ovo istraživanje, prikazat će se usporedbe do sada obavljenih PISA i TIMSS istraživanja, ali prije svega, ukratko o istraživanjima.

Kako bi se mogle utvrditi vještine i znanja koja su učenici stekli u obrazovanju, organiziraju se razni narodni i međunarodni ispiti. To je jako važno jer se tako može utvrditi valjanost i uspješnost korištenih metoda i načina učenja/ poučavanja. Republika Hrvatska i Češka Republika sudjeluju u mnogim istraživanjima vezanih za nastavu matematike, a ovdje će biti predstavljeni PISA i TIMSS istraživanja. Zadaci koje učini dobiju u okviru tih istraživanja nisu obični klasični zadaci koje inače rješavaju tokom redovne nastave matematike, već su to otvoreniji zadaci problemskog tipa.

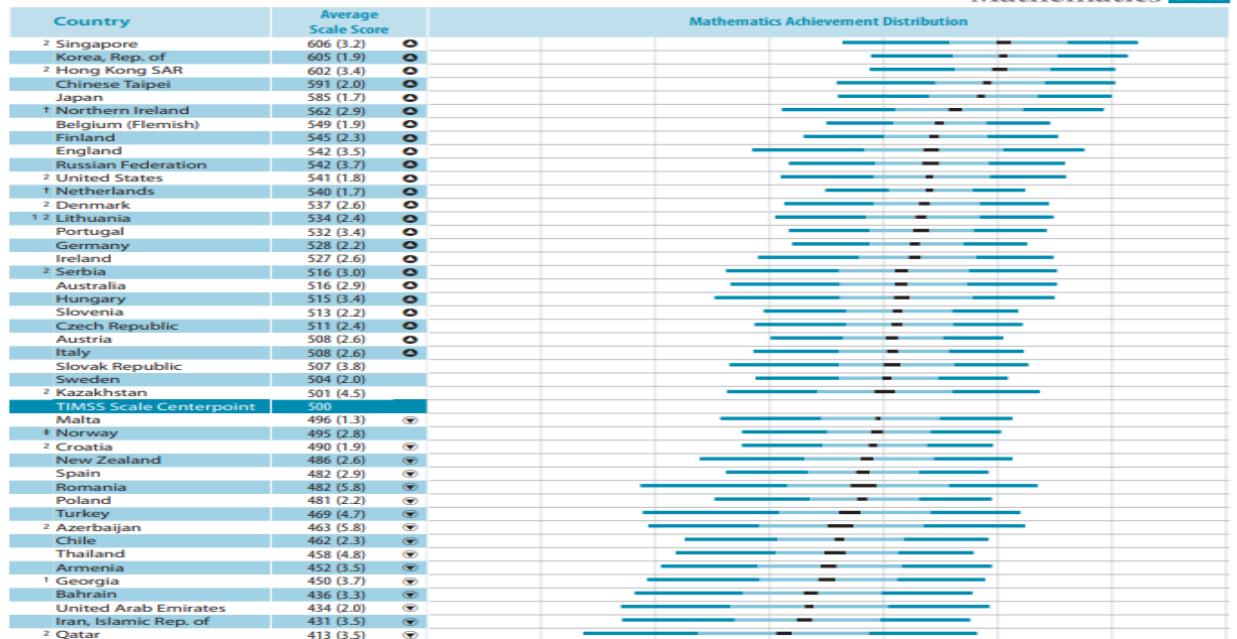
### 6.1. TIMSS

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je međunarodno istraživanje čiji je pun naziv preveden na hrvatski „Međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja). Međunarodna organizacija za vrednovanje obrazovnih postignuća „IEA“ provodi ovo istraživanje. Prvo istraživanje proveli su 1995.godine i od tada ga provedu svake četiri godine.

U istraživanju sudjeluju četvrti i osmi razredi osnovnih škola te četvrti razredi srednje škole. TIMSS ispiti se baziraju na tri sadržajne domene: gemoetrijski oblici, brojevi i prikaz podataka), kao i tri kognitivne domene: činjenično znanje, primjena znanja i zaključivanje. (TIMSS, 2015) Ravnatelji, učitelji i profesori i roditelji također rješavaju upitnike kako bi se uvidjeli uvjeti u kojima učenik radi. I Republika Hrvatska i Češka Republika sudjeluju u TIMSS istraživanjima.

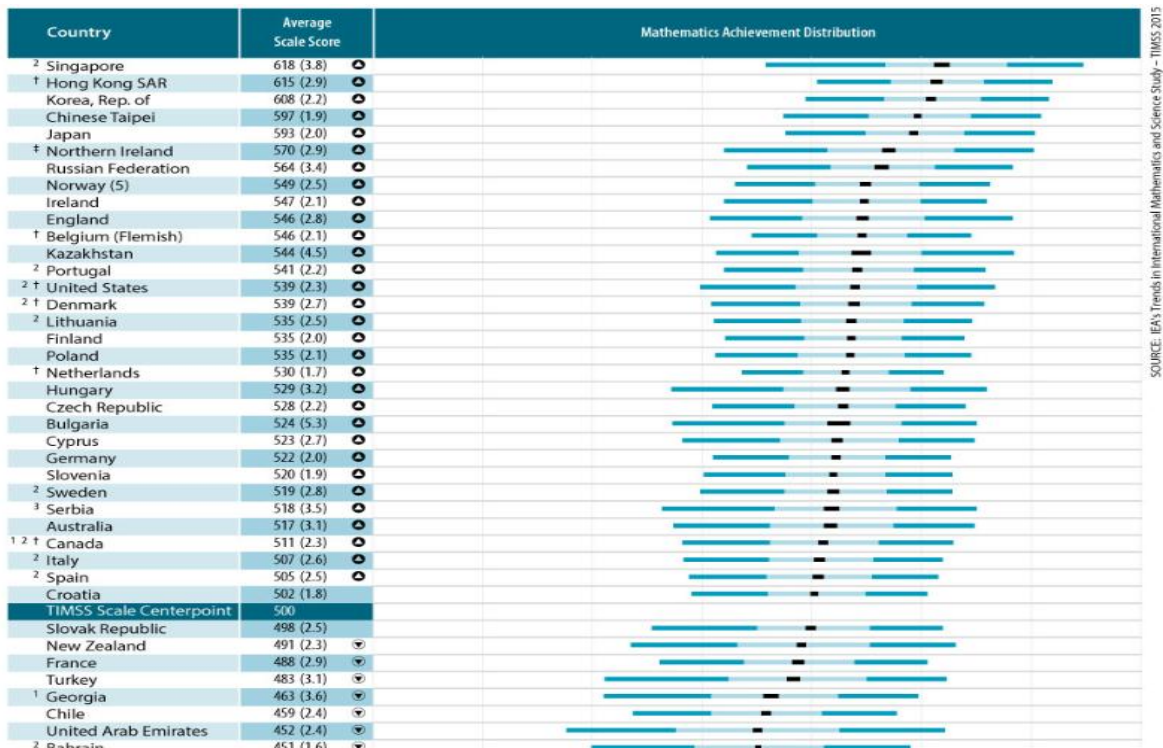
Republika Hrvatska je u TIMSS istraživanju 2011. i 2015.godine sudjelovala samo u četvrtim razredima osnovne škole, pa će se usporediti samo ti razredi sa četvrtim razredima Češke Republike.

Exhibit 1.1: Distribution of Mathematics Achievement



Slika 2.- rezultati TIMSS israživanja iz 2011.godine, preuzeto 30.7.2020.

2011.godine Hrvatska se našla ispod međunarodno postavljenog prosjeka od 500 bodova i imala je 490 bodova što joj je osiguralo 30. mjesto od ukupno njih 50 na tablici. Češka Republika bila je iznad prosjeka osvojivši prosječno 511 bodova i našla se na 22. mjestu.



Slika 3.- rezultati TIMSS israživanja iz 2015.godine, preuzeto 30.7.2020.

2015. godine od ukupno pedeset zemalja koje su sudjelovale, Hrvatska se našla na 33. mjestu, dok su Česi bili na 21. mjestu, dakle 12 mjesta ispred nas. Učenici Republike Hrvatske u prosjeku su postigli 502 boda na ispitu, a učenici Češke Republike su u prosjeku postigli 528 bodova. Ovoga puta i Hrvatska se našla iznad međunarodno određenog prosjeka.

Usporedivši rezultate iz 2011.godine i 2015.godine za obje zemlje, statistički su značajno bolji oni iz 2015.godine. Obje zemlje su po rezultatima na boljem mjestu na ljestvici, a očekujemo da će tako biti i sa rezultatima TIMSS israživanja provedenog 2019.godine koji tek trebaju doći.

## 6.2. PISA

PISA (Međunarodni program za procjenu znanja i vještina učenika) je jedno od najvećih obrazovnih istraživanja u svijetu. U njemu sudjeluju petnestogodišnjaci iz područja više od osamdeset zemalja cijelog svijeta te se istražuje koje su ključne kompetencije stekli u obavljenom obrazovanju i koliko su spremni za daljnje obrazovanje.

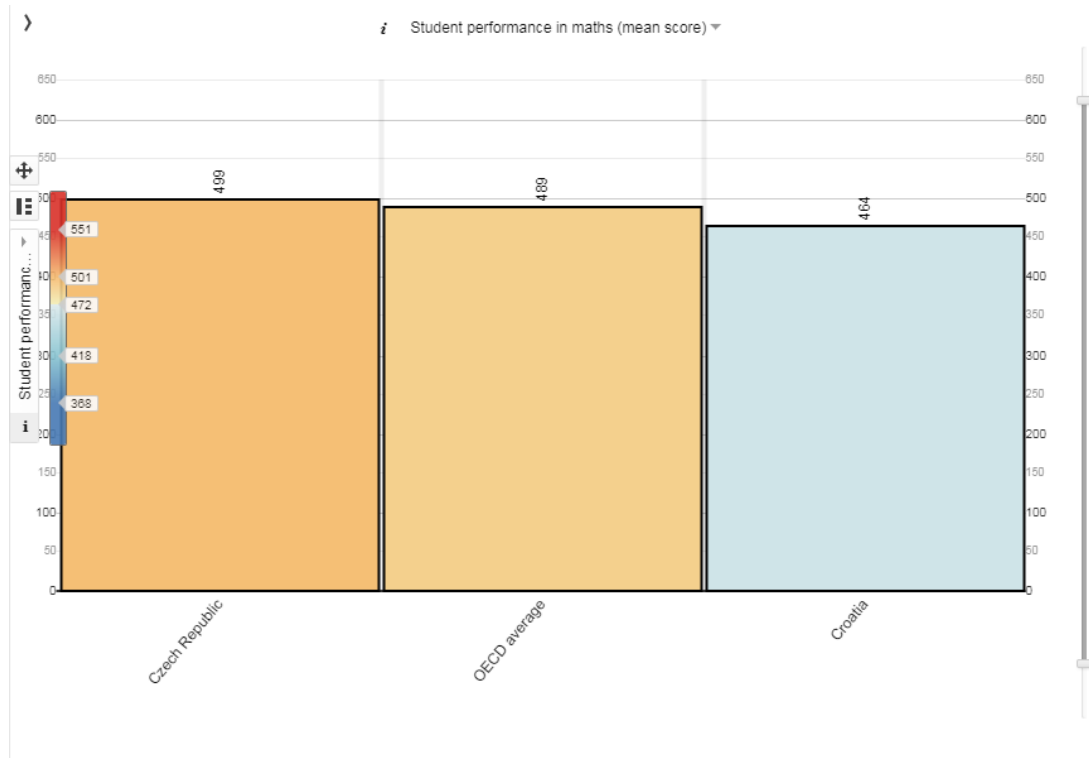
Glavni cilj kojima ima PISA istraživanje je utvrditi koliko obrazovni sustavi zemalja koje sudjeluju u istraživanju, uspijevaju u osiguravanju učenicima stjecanje kompetencija kao i želje za daljnjim učenjem. (PISA.NCVVO, 2018) Reprodukcijska naučenih znanja nije cilj, već primjena usvojenih znanja i vještina u novim i nepoznatim situacijama i okruženjima u školi, ali i izvan nje. Kada se, nakon objavljenih rezultata PISA istraživanja, identificiraju zemlje koje su uspješnije u praksi od drugih zemalja, njihove metode i obrazovne politike mogu pomoći drugim zemljama u unaprjeđenju obrazovnog sustava koristeći slične metode.

U PISA testovima, istražuju se tri područja: čitalačka pismenost, matematika i prirodoslovlje. Svake godine odabere se jedno od ta tri područja koje je „dominantnije“ od ostala dva pa se tako i pitanja većinom odnose na tu odabranu temu (70 posto na dominantnu temu, a 30 posto na druge dvije teme). (PISA.NCVVO, 2018)

Učenici koji sudjeluju u istraživanju trebali bi pokazati sposobnost korištenja svakodnevnog snalaženja u životnim situacijama, kao i sposobnost analiziranja, komuniciranja i razmišljanja na učinkovit način.

U PISA istraživanju provedenom 2018.godine sudjelovale su i Republika Hrvatska i Češka Republika. U području matematike prosječan rezultat je bio 489 bodova. Hrvatska je

postigla 464 boda, dok je rezultat Češke bio 499. Razlika je to od 35 bodova više koje ima Češka Republika čiji je rezultat bio i iznad prosječnog rezultata svih država. Hrvatskim kandidatima je trebalo još 25 bodova da bi bili među prosjekom



Slika4.- Hrvatska i Češka u PISA istraživanju 2018.godine, preuzeto 30.10.2020.

## 7. SUSTAV MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA U REPUBLICI HRVATSKOJ I ČEŠKOJ REPUBLICI

Kako bi se što bolje razvio cilj ovog istraživanja, potrebno je i zaviriti u sistem obrazovanja Češke Republike te ga usporediti sa sustavom u Republici Hrvatskoj. To će možda pomoći da se lakše shvate ishodi istraživanja kod studenata iz Češke. Obaveznim dijelom obrazovanja djeteta u Češkoj Republici smatra se predškola i osnovna škola, kao i u Republici Hrvatskoj. Srednja škola, fakultet i viša školovanja nisu obavezna. Za razliku od Hrvatske, gdje osnovna škola traje osam godina, u Češkoj Republici osnovna škola traje godinu više te ju najčešće pohađaju djeca u dobi od šest do petnaest godina. Osnovno obrazovanje nastavak je predškolskog obrazovanja ili nastavak obrazovanja u obitelji. Osnovno obrazovanje je jedina faza obrazovanja koju cijela populacija učenika prolazi na obveznoj osnovi. U Češkoj Republici organizira se u dvije faze koje su međusobno povezane sadržajem i organizacijom, kao i didaktički.

Osnovno obrazovanje prve faze zamišljeno je tako da olakša prelazak učenika s predškolskog obrazovanja i brige o obitelji na obvezne, redovne i sustavne obrasce obrazovanja. Temelji se na učenju, poštujući i razvijajući potrebe, vještine i interese svakog učenika (uključujući učenike s posebnim obrazovnim potrebama). Zahvaljujući praktičnoj prirodi koja se temelji na aktivnostima, primjenom odgovarajućih metoda, obrazovanje motivira učenike da nastave učiti, vodi ih u aktivnost učenja i pokazuje da je moguće tražiti, otkriti, stvoriti i pronaći prikladne načine rješavanja problema. U ovu fazu spadaju prvi, drugi, treći, četvrti i peti razred. Kada bi se išao sustav Hrvatskog obrazovanja usporediti sa prvom fazom obrazovanja Češke Republike, te razvrstati u dvije faze, reklo bi se da kod nas prvom fazi pripadaju prvi, drugi, treći i četvrti razred osnovne škole. U Češkoj Republici prvih pet godina obrazovanja djecu uči jedan učitelj/ica svim predmetima, osim tjelesnog obrazovanja te stranog jezika, dok u Republici Hrvatskoj prve četiri godine obrazovanja djecu uči jedan učitelj/ica svim predmetima, osim stranog jezika ili izbornog predmeta poput vjeronauka/etike, te u četvrtom razredu i glazbene kulture.

Osnovno obrazovanje druge faze Češke Republike pomaže učenicima da steknu znanje, vještine i navike koje će im omogućiti samostalno učenje i stvaranje takvih vrijednosti i stavova koji vode razboritom i kultiviranom ponašanju, odgovornom odlučivanju i poštivanju prava i obveza. Opseg i princip osnovnog obrazovanja druge faze grade na širokom razvoju interesa učenika, na potencijalu učenika na višoj razini i na međusobnoj povezanosti



obrazovanja i školskog života s jedne strane, i izvanškolskog života s druge strane. To omogućava korištenje prilično zahtjevnih metoda rada, kao i nove izvore i metode učenja, kako bi se učenicima dodijelili sveobuhvatni i dugoročni zadaci ili projekti i povjerilo im dosta odgovornosti u učenju i organiziranju školskog života. U ovu fazu spadaju šesti, sedmi, osmi i deveti razred te se vodi principom jedan predmet- jedan nastavnik. Kada bi se išao sustav Hrvatskog obrazovanja usporediti sa drugom fazom obrazovanja Češke Republike te razvrstati u dvije faze, reklo bi se da peti, šesti, sedmi i osmi razred pripada toj fazi te također vrijedi princip jedan predmet- jedan nastavnik.

Kroz svoje osnovnoškolsko obrazovanje, i Česi i Hrvati će steći znanje u područjima matematike, stranog jezika, informatike, povijesti, glazbene kulture, likovne kulture, tjelesne kulture, zdravstvenog odgoja, fizike, kemije te prirodnih znanosti. U Češkoj Republici građanski odgoj te čovjek i svijet rada su predmeti koji su također u kurikulumu. Spektar predmeta se baš i ne razlikuje između ove dvije države te se, barem po popisu predmeta, znanje jednog osnovnoškolca iz Češke Republike i Republike Hrvatske ne bi trebalo puno razlikovati.

## 7.1. Matematika u nižem osnovnoškolskom obrazovanju Češke Republike i Republike Hrvatske

U osnovnom obrazovanju, obrazovno područje matematika temelji se prije svega na aktivnostima tipičnim za rad s matematičkim pojmovima i za uporabu matematike u stvarnim životnim situacijama. Pruža znanja i vještine potrebne za praktični život i olakšava stjecanje matematičke pismenosti. Jedan od ciljeva nastavnog predmeta matematike za Republiku Hrvatsku je da učenici mogu samostalno i u različitim okruženjima matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji.<sup>1</sup> Ciljevi i zadaci matematike u obje države su slični te se baziraju na uspješnu primjenu matematike u matematičkom kontekstu i stvarnom životu, na razvitak pozitivnog mišljenja prema matematici i vlastitim matematičkim sposobnostima, na stjecanje matematičkih kompetencija ovisno o razini obrazovanja učenika.

---

<sup>1</sup> [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html) preuzeto 30.10.2020.

Učenici nižim osnovnoškolskim obrazovanjem steći će, između ostalih, znanja vezana za područja prirodnih brojeva kako bi modelirali situacije iz stvarnog života, brojanja, pisanja i čitanja do tisuću, uče se koristiti tablice, grafove, crtaju geometrijske figure, znat će identificirati, označiti i opisati osnovne dvodimenzionalne geometrijske likove te jednostavna geometrijska tijela, uspoređivati veličine likova, odrediti dužine, odrediti opseg zadanog tijela koristeći stranice, konstruirati paralelne i okomite crte, koristiti osnovne jedinice površine. Jako važan dio je problemska matematika koja zahtjeva logičko razmišljanje. Učenici uče rješavati situacije i zadatke iz svakodnevnog života, uče kako razumjeti i analizirati problem, kako sortirati podatke i uvjete i kako skicirati situacije. Težina rješavanja zadataka ovisi o razini intelektualnog razvoja učenika, ali i ovakvi zadaci pojačavaju sigurnost učenika u svoje vještine logičkog mišljenja.

#### 7.1.1. Hejny metoda rješavanja problemskih zadataka na Karlovom sveučilištu

Studenti Karlovog sveučilišta u Pragu, a odjeljku za učiteljske studije, su jedini studenti koji problemske zadatke uče po određenoj metodi, tj shemama. Te sheme razvio je njihov profesor, Vit Hejny koji je analizirao razlog koji stoji iza činjenice da njegovi učenici nisu pokušavali razumjeti probleme, nego bi radije zapamtili formule koje su pogodne samo za tipične probleme. Pretražio je nestandardne probleme koje je testirao u eksperimentima sa učenicima, uključujući i njegovog sina. Nažalost, političke okolnosti nisu dopustile dalje širenje tih zaključaka.

1974., nakon spora s učiteljem matematike svog sina, Milan Hejny, matematičar, odlučio je postati učitelj vlastitog djeteta u školi. S malim timom kolega, počinje dorađivati očeve ideje te su opsežni tekst o tome objavili 1987. godine. Za razliku od tradicionalnog učenja matematike, koje je usredotočeno na prakticiranje standardnih problema, nova metoda usmjerena je na izgradnju mreže mentalnih matematičkih shema. Ove sheme formira svaki učenik pojedinačno, tijekom postupka rješavanja odgovarajućih problema i razgovorom o svojim rješenjima međusobno u razredu s drugim učenicima.

U devedesetima se oko profesora Hejny-a formira tim na Pedagoškom fakultetu Karlova sveučilišta u Pragu, a metode pronalaze svoj put u sveučilišnim nastavničkim programima za učitelje i, zahvaljujući radionicama za osposobljavanje nastavnika, u stvarnim učionicama. Na inicijativu izdavačke kuće Fraus, tim piše niz udžbenika matematike za osnovnu školu. M. Hejny osnovao je tvrtku H-mat, 2013. godine radi sustavnoga razvijanja i širenja metode. U 2015. godini udžbenike je usvojilo 20% čeških škola. Trenutno se stvaraju udžbenici za razinu

niže srednje škole. Postoje planovi za udžbenike viših srednjih škola i za proširenje trenutne sheme podrške za učitelje koji predaju metodom. Poznavanje metode potaknulo je i istraživanje mogućnosti provedbe metode u drugim školskim predmetima.

Hejny metoda temelji se na poštivanju dvanaest ključnih načela koje se kombiniraju u povezani pristup koji djeci omogućuje otkrivanje matematike samostalno i s užitkom.

Građevinska shema najlakše se da objasniti pričom. Ukoliko pitamo nekoga koliko prozora ima u njegovoj kući, ta osoba vjerojatno neće odmah to znati napamet, međutim, ako mu damo malo vremena da razmisli, doći će do točnog rješenja. U praksi se ovi formativni trenuci unutarnje napetosti najčešće javljaju u razredu kao rezultat rasprave o razlici različitih mišljenja učenika.

Rad u okruženju je važan čimbenik za učenje bilo kojeg gradiva. Kad djeca poznaju okoliš i u njemu se osjećaju ugodno, ne ometaju ih nepoznate stvari. Učenici smatraju da su teme iz okruženja atraktivne. Obično pokušaj doživljavaju kao igru, a ne kao ozbiljan posao. Ni ne primjećuju koliko su pojedinačnih vježbi riješili tijekom eksperimentiranja. To se obično ne događa pri izvođenju vježbi iz tradicionalnih udžbenika matematike jer se sastoje od problema sličnog tipa i pogodni su za trening pamćenja.

Međusobno povezane teme shema ne izolira matematičke pojave i pojmove, već prihvaća različite strategije za njihovo rješavanje. Ovu shemu opet opisuju preko koncepta kuće. Ukoliko netko želi razraditi shemu kuće učeći o prozorima u rujnu, o kuhinji u listopadu, o zahodima u studenom i o osvjetljenju u prosincu, u siječnju će trebati sve ponoviti jer će se zaboraviti ono naučeno u rujnu. Ovom shemom, uči se o kući direktno iz akcije, putem svakodnevnih aktivnosti koje su povezane te se tako može podsjetiti o svakoj shemi bilo kada.

Razvoj karaktera je jedan od glavnih motiva profesora Hejnyja za stvaranje nove nastavne metode, kao i zaštita učenika od manipuliranja tijekom njihovog života.

Istinska motivacija-U Hejny metodi svi su matematički problemi osmišljeni tako da djeca "automatski" uživaju u rješavanju problema. Prava vrsta motivacije je unutarnja vrsta, a ne prisiljena vanjskim čimbenicima. Djeca pronalaze rješenja problema zahvaljujući vlastitom trudu. Djeci ne oduzimamo radost zbog osobnog uspjeha. Zahvaljujući razrednom duhu koji njegujemo, svaki učenik dobiva aplauz, čak i oni koji neki fenomen ili rješenje otkriju kasnije od ostalih.

Iskustvo iz stvarnog života- Gradi se na prirodnom, konkretnom iskustvu koje dijete može koristiti za stvaranje općih zaključaka. Na primjer, djeca "šivaju haljinu" za kocku, automatski uče koliko lica, vrhova i rubova kocka ima, kako izračunati njenu površinu. Računske radnje

djeca neće računati nekom formulom, već će izići ispred ploče, poredati se te računati po koracima.

Uživanje u matematici- Razina složenosti predstavljenih matematičkih problema postavljena je tako da manje sposobni učenici mogu iskusiti radost uspjeha. Ovim učenicima dodijeljeni su problemi čija je razina težine primjerena njihovim vještinama. Ovdje je izuzetno važna riječ prikladna: problem mora biti dovoljno jednostavan da ga učenik riješi, ali dovoljno izazovan da se učenik mora potruditi i da će osjetiti radost kad ga je riješio.

Osobno znanje- Ova shema kreće pričom kad se od šestogodišnjaka traži da izgradi kvadrat pomoću šipki, oni pakuju prvu, drugu, treću šipku ... ovi još uvijek nisu dovoljni, pa uzimaju četvrtu šipku i grade kvadrat. Tada odlučuju sagraditi veći trg. Pakuju više štapova i grade veći kvadrat, počevši shvaćati da će im, kad god žele napraviti veći kvadrat, trebati četiri dodatna štapa. Oni su sada na putu da otkriju formulu za izračun opsega nekog kvadrata. Udžbenici i radne bilježnice Hejny metode se razlikuju od klasičnih udžbenika. U dobi od 10 godina učenici su pizzu izrezali na kriške, izrezali papir i stavili razne komade u tortu, krug ili čokoladni bar i riješili razne probleme koji uključuju slične teme. Nikad im nije rečeno kako izračunati dio cjeline.

Uloga učitelja- Tipična slika učitelja je slika onoga tko posjeduje znanje i vještine i predaje o njima. U Hejny metodi razumijevanja nastavnog procesa, učitelj nije autoritet predavanja sa znanjem i vještinama. Da, učitelj to zna i može, ali to ni na koji način ne pokazuje. Ako bilo tko objašnjava stvari, to je učenik. Učitelj je zadužen za organizaciju nastave, poticanje rada učenika, postavljanje odgovarajućih zadataka, dijeljenje radosti učenika zbog njihovih otkrića i posredovanje u raspravama. Također planira i nadgleda lekcije tako da svaki učenik ima odgovarajuće poslove. Ako nastavnici žele uspješno usvojiti Hejny metodu, prilagođavanje vlastite uloge jedna je od najtežih promjena koje moraju izvršiti.

Rad sa greškama- Činjenje i analiza vlastitih grešaka stvara duboko iskustvo, koje nam pomaže da se bolje sjetimo znanja koje smo stekli. Koristimo pogreške kao sredstvo učenja. Potičemo učenike na prepoznavanje vlastitih grešaka i učimo ih da objasne zašto su ih napravili. Povjerenje učitelja i učenika pojačava zadovoljstvo djece u izvršavanju njihovih zadataka. Ako se učenik boji pogriješiti, učitelj Hejny metode potiče učenika dajući vlastiti primjer: pokazujući im gdje je učitelj krenuo krivo i kako su otkrili izvor svoje pogreške. Kad god učenik ukaže na grešku koju je učinio učitelj, učitelj zahvaljuje učeniku što je ispravio pogrešku i nagrađuje ih pohvalom. Glasno analiziranje (učiteljeve) pogreške ispred klase vrlo je učinkovito. Učenici mogu promatrati moguće načine postupanja s pogreškama i naći će takve primjere nadahnjujuće.

Odgovarajući izazov- Hejny udžbenici predstavljaju probleme s različitim stupnjevima teškoće. Uvijek treba dopuštati slabijim učenicima da uspješno riješe neke probleme jer to sprečava bilo koji osjećaj tjeskobe i straha od budućih lekcija matematike. Istovremeno, najboljim učenicima neprestano pružaju daljnje izazove kako bi spriječili da dožive dosadu. Učitelj bira zadatke prema potrebama svakog djeteta. Moglo bi se činiti da jači učenici čine mnoga otkrića, dok slabiji jednostavno nisu od sreće. Učitelj ima ključnu ulogu ovdje.

Podrška međusobne suradnje- Pomoću Hejny metode, djeca ne trebaju čekati da se rješenje pojavi na ploči. Rade u skupinama, u parovima ili pojedinačno. Svaki je učenik u stanju podijeliti kako je pronašao njihovo rješenje, a također je u stanju objasniti svoj rad drugima. Rješenje se pojavljuje kroz suradnju.

Hejny udžbenici i radne bilježnice za sada su dostupni samo za primarno obrazovanje matematike, u Češkoj je to od prvog do petog razreda osnovne škole. Karlovo sveučilište u Pragu na Odjelu za učiteljske studije je za sada jedino koje svoje studente uče ovoj metodi. Pošto je osnivač Milan Hejny, profesor na Odjelu za izobrazbu učitelja na Karlovom sveučilištu, studenti uče o ovoj metodi iz prve ruke. Također se i organiziraju tečajevi za one koji žele koristiti ovu metodu u svome razredu, kao i razni seminari koji educiraju o ovoj metodi po školama.

## 8. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

Cilj ovog diplomskog istraživanja bio je usporediti razlike u principima rješavanja matematičkih zadataka problemskog tipa kod studenata Učiteljskog studija na Sveučilištu u Zadru i studenata Učiteljskog studija na Karlovom sveučilištu u Pragu. Trebalo se istražiti u koju dubinu problemskih zadataka studneti ulaze kada ih rješavaju, kojim se metodama služe te postoji li izuzetna razlika između studenata u Hrvatskoj i Češkoj. Zbog izvanredne situacije uzrokovane virusom Covid-19, sveučilišta su bila zatvorena te su se ankete provele online. Ispitanici su dobili pred sebe upitnik od 9 pitanja od kojih su 3 pitanja bili problemski zadaci. Odaziv studenata iz Zadra bio je zadovoljavajuć, dok se studenti iz Češke, unatoč unaprijed dogovorenoj suradnji, nisu sudjelovali u velikom broju.

### 8.1. Problem istraživanja

Problem istraživanja bio je usporediti usporediti razlike u principima rješavanja matematičkih zadataka problemskog tipa kod studenata Učiteljskog studija na Sveučilištu u Zadru i studenata Učiteljskog studija na Karlovom sveučilištu u Pragu. Kojim se metodama studenti koriste i koje su metode učili na fakultetu te koristili u praksi tokom fakulteta. U anketi su postavljena pitanja o učestalosti i navikama rješavanja problemskih zadataka u osnovnoškolskom i sveučilišnom obrazovanju i jednoj i drugoj skupini studenata. Cilj je ispitati postoji li razlika u metodama rješavanja problemskih zadataka, kao i u susretanju sa problemskim zadacima kroz prethodno obrazovanje.

### 8.2. Instrument istraživanja i uzorak

Kako bi se spoznala ranija saznanja i iskustva u rješavanju problemskih zadataka, sastavljena su dva upitnika, jedan za studente Sveučilišta u Zadru, a drugi za studente Karlovog sveučilišta.<sup>2</sup>

Istraživanje je provedeno u razdoblju od svibnja do kolovoza 2020. godine. Studenti su upitnike predali online putem preko „Google obrasci“ opcije. Za drugo i četvrto pitanje korištena je Likertova ljestvica za mjerenje stavova.

---

<sup>2</sup> Upitnik se nalazi u privitku

### 8.3. Rezultati istraživanja

Rezultati ispitivanja će biti predloženi kao usporedba studenata iz Republike Hrvatske i Češke Republike.

Prvim pitanjem „Koja ste godina studija?“, htio se dobiti uvid u obrazovanje pojedinog ispitanika. Ponuđeni odgovori su bili 1., 2., 3., 4. i 5. godina. Većina i Čeških i Hrvatskih ispitanika je bila peta godina studija. Za usporedbu rješavanja zadanih problemskih zadataka je prednost to što se većina ispitanika nalazi u istoj ili sličnoj fazi obrazovanja zato što bi im onda i opseg znanja trebao biti na istoj ili sličnoj razini.

Drugim pitanjem „Koliko često ste se susreli sa problemskim zadacima kroz Vaše osnovnoškolsko obrazovanje?“, htio se dobiti uvid u učestalost susretanja sa problemskim zadacima kroz Osnovnu školu. Počeci u matematičkom obrazovanju i stjecanje navika rješavanja problemskih zadataka jako su važni za daljnje učenje i razumijevanje matematike. Ponuđeni odgovori bili su „nimalo“, „vrlo malo“, „malo“, „prilično“ i „potpuno“. Odgovori „malo“ i „prilično“ bili su najučestaliji i kod Hrvatskih i kod Čeških ispitanika. Dakle, općenito govoreći za obje skupine ispitanika, jedni se nisu baš često susretali sa problemskim zadacima, ali su ih obradili na nekakav način, tj. vjerojatno su obrađivali samo jedan dio gradiva problemskih zadataka kroz osnovnoškolsko obrazovanje. Drugi su se češće susretali sa problemskim zadacima te su više obrađivali gradivo problemskih zadataka.

Treće pitanje „S kojim metodama rješavanja problemskih zadataka ste se susreli kroz svoje osnovnoškolsko obrazovanje? (višestruk odabir)“, dalo je uvid u metode rješavanja problemskih zadataka koje su ispitanicima bile poznate u osnovnoj školi, dakle, dalo je uvid u najučestalije korištene metode rješavanja problemskih zadataka u Osnovnim školama. Ispitanici su mogli odabrati više odgovora. Ponuđeni odgovori bili su „metodom postavljanja formule“, „metodom pokušaja i pogrešaka“, „metodom grafičkog prikaza“, „skiciranjem“, „izradom tablice ili dijagrama“, „pisanjem pomoćnog zadatka“ ili „nešto drugo“. Kod zadnjeg ponuđenog odgovora, ispitanici su mogli sami upisati metodu. Hrvatski ispitanici su u velikoj većini odgovorili „metodom postavljanja formule“ te „skiciranjem“, dok je većina Čeških ispitanika odgovorila „skiciranjem“. Ostatak odgovora je bio odabran u malom postotku kod obje skupine ispitanika. U praksi rješavanja

problemskih zadataka u osnovnim školama ispitanika najčešće je korištena metoda skiciranja problemskog zadatka. Ta metoda je pogodna pogotovo za osnovnu školu jer je vizualiziranje problemskog zadatka poželjno, ono učenike može navesti na još neke ideje za rješavanje zadatka, kada se skicira zadatak, lakše se i shvati što se traži u njemu. Kod Hrvatskih ispitanika također je većinski bila prisutna rješavanja zadataka određenom formulom, što i nije idealno za rješavanje problemskih zadataka kod osnovnoškolaca kojima bi formula ne bi trebala biti jedna od metoda prikladna za rješavanje problemskih zadataka.

Četvrtim pitanjem „Koliko često ste se susretali sa problemskim zadacima kroz Vaše akademsko obrazovanje?“, htio se dobiti uvid u učestalost susretanja sa problemskim zadacima kroz fakultet te uvidjeti vidi li se razlika između učestalosti rješavanja problemskih zadataka u osnovnoj školi te fakultetu kod ispitanika. Ponuđeni odgovori bili su „nimalo“, „vrlo malo“, „malo“, „poprilično“ i „potpuno“. Kod Hrvatskih ispitanika odgovori „prilično“ i „malo“ su bili najučestaliji, dok su kod Čeških ispitanika najučestaliji odgovori bili „potpuno“ i „rijetko“. Obje skupine ispitanika su bili studenti ista dva Sveučilišta pa je razlika u njihovim odgovorima malo upitna. Ti ispitanici su bili studenti ili sa iste godine ili kolege sa Odjela pa bi i učestalost susretanja sa problemskim zadacima trebala biti slična, međutim, ovo su subjektivni odgovori te svaki ispitanik ima svoje „mjerilo“ koliko se nešto obrađivalo.

Peto pitanje bilo je „S kojim metodama rješavanja problemskih zadataka ste se susreli kroz svoje akademsko obrazovanje? (višestruk odabir)“, te je ono dalo uvid u metode rješavanja problemskih zadataka koje su ispitanici obrađivali na fakultetu. Ponuđeni odgovori bili su „metodom postavljanja formule“, „metodom pokušaja i pogrešaka“, „metodom grafičkog prikaza“, skiciranjem“, „izradom tablice ili dijagrama“, „pisanjem pomoćnog zadatka“ ili „nešto drugo“. Kod zadnjeg ponuđenog odgovora, studenti su mogli sami upisati metodu. Kod Hrvatskih i kod Čeških ispitanika, tri su odgovora bila najučestalija, a to su „metoda postavljanja formule“, „metoda grafičkog prikaza“ te „skiciranjem“. Odgovore „izradom tablice ili dijagrama“ te „pisanjem pomoćnog zadatka“ su Hrvatski studenti također birali, međutim, ne u tolikom postotku. Može se zaključiti da su se ispitanici više susreli sa različitim metodama rješavanja kroz akademsko obrazovanje, nego kroz osnovnoškolsko obrazovanje. Kao budući učitelji koji trebaju biti upoznati sa raznim metodama rješavanja problemskih zadataka, pozitivno je to što je svaka od



ponuđenih metoda odabrana, ispitanici su se susreli sa svim navedenim metodama, samo nisu sa svakom u istoj mjeri.

Prije šestog zadatka naznačeno je „Sljedeća tri zadatka riješite tako da ga prvo skicirate, a zatim ga postavite i brojčano riješite“.

Prvi od tri zadatka koja su trebali riješiti glasi: „Ivana je u trgovini potrošila 36 kuna i kupila je 2 bilježnice i jednu pernicu. Ako jedna bilježnica košta duplo manje nego pernica, koliko košta jedna bilježnica i pernica?“

Jedan od ispitanika iz Hrvatske ovaj zadatak riješio je tako da je bilježnice skicirao kao uspravne pravokutnike plave boje, a pernicu kao vodoravni pravokutnik crvene boje. Ovom ispitaniku u njegovoj skici nedostaje još jedan korak u kojem bi zbrajao četiri uspravna plava pravokutnika da bi dobio rezultat 36 i zatim bi zaključio da jedan uspravni pravokutnik tj. bilježnica košta 9 kuna, a da jedan vodoravni pravokutnik tj. pernica košta 18 kuna. Ispitanik je priložio i rješenje putem brojevnog prikaza, na način da je ukupni rezultat podijelio sa dva, pa dobiveni rezultat opet podijelio sa dva, ne naznačivši kako i zašto je došao do toga. Zanimljivo je da je ovaj ispitanik, jedini, zadatak shvatio tako da u zadatku piše „Ako jedna bilježnica košta duplo manje nego pernica, koliko košta jedna bilježnica i pernica, *zajedno*?“. U zadatku je naznačeno da se izračuna cijena jedne bilježnice i jedne pernice, međutim, ovaj ispitanik je shvatio da se treba izračunati i cijena jedne pernice i jedne bilježnice zajedno te je to i uradio brojčanim prikazom, nije grafički prikazao.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \square \square + \square = 36 \text{ kuna} \\
 \square = \square \square \\
 \downarrow \\
 \square = 9 \text{ kn} \quad \square = 18 \text{ kn}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 36 \div 2 = 18 \\
 18 \div 2 = 9 \\
 \text{Pernica} = 18 \text{ kn} \\
 \text{Bilježnica} = 9 \text{ kn} \\
 18 + 9 = 27 \\
 \text{Jedna pernica i bilježnica koštaju } 27 \text{ kn.}
 \end{array}$$

Slika 5.- rješenje prvog zadatka (1)

Sljedeći ispitanik iz Hrvatske je također skicom prikazao zadatak. Naznačio je pernicu slovom P i bilježnicu slovom B te grafičkim prikazom naznačio da jedna pernica košta jednako kao dvije bilježnice. Ispitanik nije dalje rješavao zadatak pomoću skice, a mogao je, tako da uoči kako je ukupna količina lente koju je nacrtao 36 i da se dijeli na četiri jednaka dijela. Tim putem je mogao doći do toga da jedna bilježnica košta 9 kuna i tako dalje riješiti zadatak. Ispitanik je riješio zadatak pomoću jednadžbe sa dvije nepoznanice, nije u potpunosti postavio zadatak, već je odmah uvrstio jednu jednadžbu u drugu i tako došao do cijene jedne bilježnice i jedne pernice.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline B & B & P=2B \\ \hline \end{array}$$

$$P=2B$$

$$2B+B+B=36$$

$$4B=36$$

$$B=9$$

$$P=2B$$

$$P=2 \cdot 9$$

$$P=18$$

Jedna bilježnica košta 9 kn,  
a pernica 18 kn.

Slika 6.-rješenje prvog zadatka (2)

Ispitanik iz Češke je riješio zadatak samo postavivši jednadžbu sa dvije nepoznanice te tako dobio točan rezultat. Vjerojatno nije pročitao naznaku da se zadatak treba riješiti i nekom drugom metodom, ili je ispitanik jednostavno odlučio zanemariti tu činjenicu i riješiti zadatak njemu najlakšom metodom.

36 HRK  
 2 \* notebook  
 1 \* pencil case

$2x = y$   
 $x = y/2$

$2x + y = 36 \text{ HRK}$

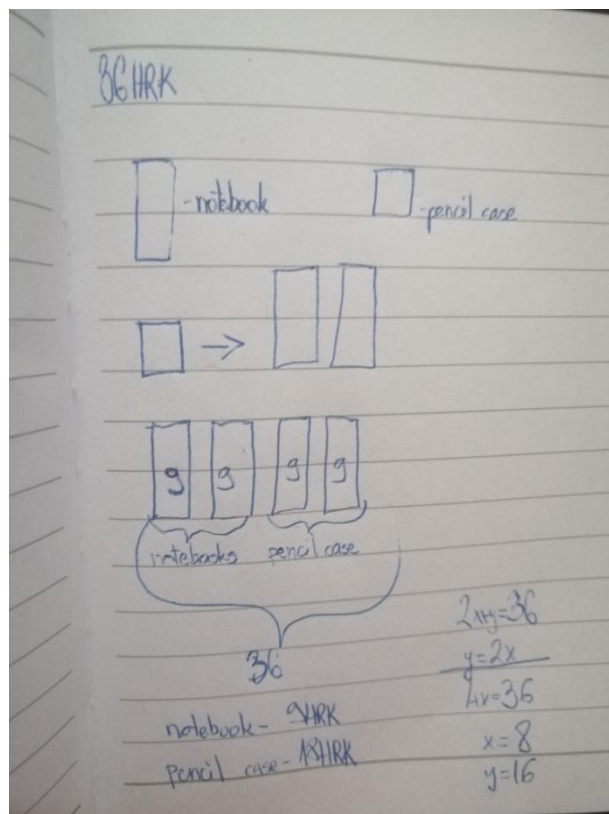
$2 \cdot \frac{y}{2} + y = 36$   
 $2y = 36 \quad | :2$   
 $y = 18$

$2x + 18 = 36$   
 $2x = 18 \quad | :2$   
 $x = 9$

Answer: notebook = 9 HRK &  
 pencil case = 18 HRK

Slika 7.-rješenje prvog zadatka (3)

Sljedeći ispitanik iz Češke se poslužio grafičkim prikazom prikazavši bilježnicu kao pravokutnik te pernicu kao kvadrat. Zaključivši da je jedan kvadrat jednako kao dva pravokutnika skicirao je četiri pravokutnika i naznačio da su četiri pravokutnika količinski 36 kuna. Po skici se vidi da je onda svaki pravokutnik jednak 9 kuna te da jedna bilježnica košta 9 kuna, a jedna pernica 18 kuna. Ispitanik je zatim riješio zadatak koristeći jednadžbu sa dvije nepoznane, slično kao i prehodni ispitanici, međutim, ispitanik je pogrešno podijelio jednadžbu u zadnjem koraku. Naime, umjesto točnog rezultata da je 36 podijeljeno sa 4 jednako 9, ispitanik je izračunao da je 8. Pošto mu je jedna nepoznana ispala krivo, pogriješio je i drugu nepoznanicu. Možda se ispitanik žurio pa nije shvatio da je pogriješio, ili je bio smeten nečim. Ispitanik je trebao još jednom provjeriti rezultate. Zanimljivo je kako je točno riješio zadatak grafičkim prikazom, a pogrešno jednadžbom. Kada je vizualizirao zadatak, točno ga je riješio, a kada je uvrstio u jednadžbu, smeo se te došao do pogrešnog rezultata. Ovo može poslužiti kao poruka da se pri rješavanju zadataka ne smije biti brzoplet te da se svaki zadatak treba dobro pročitati i pregledati prije nego se preda.



Slika 8.- rješenje prvog zadatka (4)

Drugi od tri zadatka koja su trebali riješiti glasi: „Zbroj tri broja je 45. Prvi broj je za 15 veći od drugog broja, a treći broj je za 3 manji od prvog broja. Koji su to brojevi?“ Ispitanik iz Hrvatske ovaj je zadatak riješio pomoću tri jednadžbe sa tri nepoznanice. Nije koristio nikakvu drugu metodu, iako je bilo naglašeno da bi trebao, već je zadatak riješio tako da je postavio jednadžbu sa svime što je poznato i nepoznato iz zadatka te tako dobio točan rezultat.

$$a + b + c = 45$$

$$a = b + 15$$

$$c = a - 3 = b + 12$$

$$b + 15 + b + b + 12 = 45$$

$$3b + 27 = 45$$

$$3b = 45 - 27$$

$$3b = 18$$

$$b = 6$$

$$a = 6 + 15 = 21$$

$$c = 21 - 3 = 18$$

Slika 9.- rješenje drugog zadatka (1)

Sljedeći ispitanik iz Hrvatske zadatak je riješio grafičkim prikazom skiciravši lentu podijeljenu na tri dijela. Svaki dio označavao je jedan broj iz zadatka, a drugi broj (b) mu je bio mjerilo za postaviti prvi i treći broj te je tako prvi broj bio  $b+15$ , a treći broj  $b+12$ . Naznačio je i da je cijela lenta jednaka broju 45. Nacrtao je i drugu lentu gdje je zbrojio sve nepoznanice te došao do toga da je  $3b$  jednako broju 27. Ispitanik je zatim riješio zadatak kao tri jednadžbe sa tri nepoznanice te je u konačnici dobio točan rezultat.

The image shows a handwritten solution on a piece of paper. At the top, there are two horizontal bars representing the problem. The first bar is divided into three segments labeled 'b+15', 'b', and 'b+12', with a bracket underneath the entire bar labeled '45'. To the right of this bar is the equation '45 - 27 = 18'. The second bar is divided into two segments labeled '3b' and '27', with a bracket underneath the entire bar labeled '45'. Below the bars, the following equations are written:

$$a + b + c = 45$$

$$a = 15 + b = 15 + 6 = 21$$

$$c = a - 3 = 15 + b - 3 = 12 + b - 12 + 6 = 18$$

$$15 + b + b + 12 + b = 45$$

$$3b = 18$$

$$b = 6$$

Slika 10.- rješenje drugog zadatka (2)

Ispitanik iz Češke riješio je ovaj zadatak samo postavivši jednadžbu sa tri nepoznanice. Tri nepoznata broja je naznačio kao x, y i z te izvukao iz zadatka međusobne odnose među prva dva broja, dakle, da je prvi broj za 15 veći od drugog broja ( $x=15+y$ ). Pokušao je riješiti jednadžbu a da treći broj (z) ne uvrsti u odnos s drugim brojem, što je shvatio te krenuo ispočetka naznačivši da je z jednako x-3 te je uvrstio sva tri navedena broja i dobio točne rezultate za x,y i z.

$$x + y + z = 45$$

$$x = 15 + y \Leftrightarrow y = x - 15$$

$$z = x - 3$$
~~$$15 + y + y + z = 45$$

$$(2y + 15) + z = 45$$

$$2y + z = 30$$~~

$$x + (x - 15) + x - 3 = 45$$

$$3x - 18 = 45$$

$$3x = 63 \quad | :3$$

$$x = 21$$

$$y = 6$$

$$z = 18$$

Answer  $\left\{ \begin{array}{l} x = 21 \\ y = 6 \\ z = 18 \end{array} \right.$

Slika11.- rješenje drugog zadatka (3)

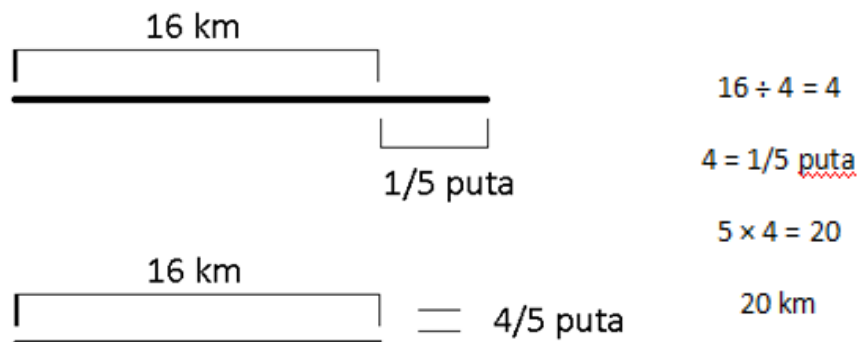
Sljedeći ispitanik iz Češke je istom metodom riješio navedeni zadatak, samo što je ovaj ispitanik sve brojeve stavio u kontekst sa trećim brojem (z), za razliku od prethodno navedenog ispitanika koji je brojeve stavio u kontekst sa prvim brojem (x). Ovaj ispitanik je točno riješio zadatak koristeći se jednadžbom sa tri nepoznanice.

Drugi zadatak ispitanici su najviše rješavali koristeći se jednadžbom jer im je najvjerojatnije tako bilo najlakše predočiti zadatak. Nisu bili baš maštoviti pri smišljanju metoda za ovaj zadatak već su „igrali na sigurno“ koristeći jednadžbe.

$$\begin{aligned}
 x+y+z &= 15 \\
 x &= 15+y \\
 z &= x-3 \quad z = 15+y-3 \quad z = 12+y \\
 \\ 
 y+15+y+12+y &= 45 \\
 3y &= 18 \\
 y &= 6 \\
 \\ 
 x &= 15+6 & z &= 12+6 \\
 x &= 21 & z &= 18
 \end{aligned}$$

Slika 12.- rješenje drugog zadatka (4)

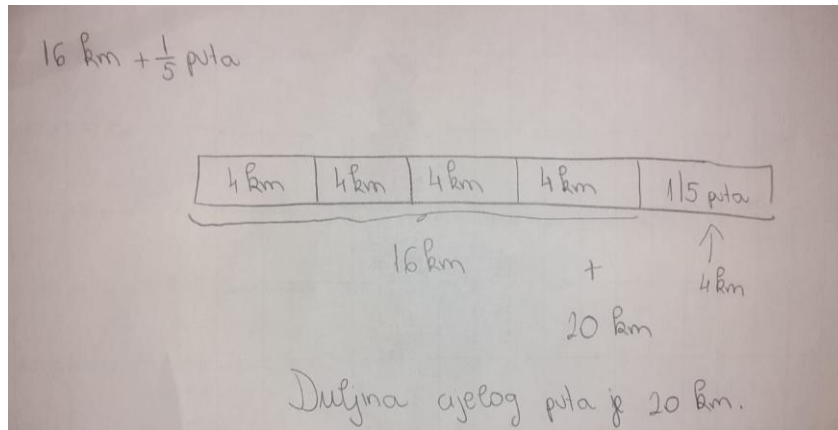
Posljednji zadatak glasio je: „Kada je biciklist prešao 16 km i još petinu svojeg cijelog puta stigao je na cilj. Kolika je duljina cijelog puta što ga je prešao taj biciklist?“ Jedan od ispitanika iz Hrvatske prikazao je put koji je biciklist prešao kao cjelinu podijeljenju na pet dijelova te naznačio da je 16 kilometara jednako kao i četiri petine toga puta, što bi značilo da je jedna petina puta jednaka 4 kilometra te je cijeli put duljine od 20 km. Ispitanik je riješio zadatak i brojevnim izrazom izračunavši najprije kolike je duljine jedna petina puta pa je dobiveni rezultat pomnožio sa 5 i dobio konačan rezultat kao 20.



Slika 13.- rješenje trećeg zadatka (1)



Sljedeći ispitanik iz Hrvatske ovaj je zadatak riješio tako da je grafički prikazao put kao lentu podijeljenu na pet jednakih dijelova. Naznačio je 16 kilometara kao četiri dijela lente. Iz prikaza je vidljivo da je svaki dio jednak četiri kilometra i tako je ispitanik došao do rezultata duljine puta od 20 kilometara. Ispitanik nije brojčano niti jednadžbom riješio ovaj zadatak, već je ostalo na grafičkom prikazu.



Slika 14.- rješenje trećeg zadatka (2)

Ispitanik iz Češke zadnji je zadatak riješio koristeći se jednadžbom sa jednom nepoznanicom. Ovaj ispitanik nije koristio nikakvu drugu metodu, iako je to bilo naglašeno

$x = \text{length of journey}$

$$16 \text{ km} + \frac{1}{5} x = x$$

$$16 \text{ km} + 0,2 x \text{ km} = x$$

~~$16 + x$~~

~~$$x - 0,2x = 16 \quad | : -0,2$$~~

$$16 + \frac{1}{5} x = x \quad | \cdot 5$$

$$80 + x = 5x$$

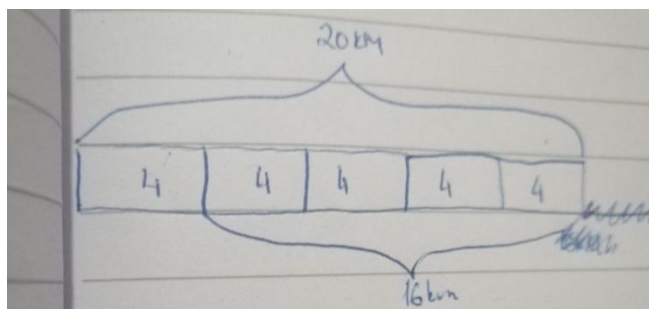
$$4x = 80 \quad | : 4$$

$$\underline{\underline{x = 20}}$$

Answer: Length of journey is 20 km

Slika 15.- rješenje trećeg zadatka (3)

Sljedeći ispitanik iz Češke riješio je ovaj zadatak tako što je skicirao lentu koju je podijelio na pet jednakih dijelova, od kojih je četiri dijela označio da vrijede 16 kilometara pa je vjerojatno podijelio 16 sa 4 i dobio da svaki dio vrijedi kao 4 kilometra, što bi značilo da je ukupan put duljine 20 kilometara. Ovaj ispitanik riješio je zadatak samo grafičkom metodom, također, ispitanik je samo srtelicom naznačio da je put duljine od 20 kilometara, nije to posebno naznačio.



Slika 16.- rješenje trećeg zadatka (4)

Na posljednje pitanje koje je glasilo „Na koji način Vam je bilo lakše riješiti zadatke i zašto?“ studenti su trebali sami upisati odgovor. Odgovori ispitanika su se razlikovali, međutim nije bilo neke razlike što se tiče Hrvatske i Češke, većini ispitanika bilo je lakše riješiti zadatak pomoću postavljanja jednadžbe. Neki od odgovora bili su:

*„Brojčano jer si automatski smislim zadatak u glavi, a za skicu, bezobzira što je nekad lakša, se trebam malo više potruditi“*

*„Pomoću skiciranja. Zato što daje "slikovni prikaz" zadatka/problema.“*

*„Najlakše tj.jedini način na koji znam riješiti ovakve i slične zadatke je jednadžbama, ne znam jesmo li tako uopce smjeli riješavati ali svakako ja drugačije ne bih ni znala jer mi slike puno ne govore.“*

*„Postavljanjem brojevnog izraza. Ne snalazim se u skiciranju.“*

Upitnik sastavljen za Češke ispitanike se sastojao od još jednog pitanja, da napišu nekoliko rečenica o praksi kod učenja matematike na njihovom fakultetu. Tim pitanjem trebao se dobiti uvid u praksu predavanja matematike na njihovom Sveučilištu, međutim, odgovori nisu bili opširni. Odgovori su većinom bili da su koristili više metoda te da su imali predavanja nekoliko semstara, dakle, nisu se dobili potrebni odgovori.



#### 8.4. Rasprava

Cilj ovog istraživanja bio je usporediti razlike u principima rješavanja matematičkih zadataka problemskog tipa kod studenata Učiteljskog studija na Sveučilištu u Zadru i studenata Učiteljskog studija na Karlovom sveučilištu u Pragu. Zbog izvanredne situacije uzrokovane virusom Covid-19, Sveučilišta su bila zatvorena te se istraživanje nije moglo provesti fizički, na Sveučilištima, već online putem. Za ispitanike je bilo pripremljeno devet pitanja, od kojih su tri pitanja bila zapravo zadaci problemskog tipa. Ispitanici su svoje odgovore i rješenja zadataka predali u formatu „Google obrasci“.

Rezultati istraživanja ne mogu se u potpunosti generalizirati razine država, zato što uzorak ispitanika koji su se odazvali i ispunili upitnik, nije velik. Kako je upitnik bio namijenjen za više studenata, ovim istraživanjem želi se samo prikazati mjera od nekoliko reprezentativnih primjeraka. Većina ispitanika bila je na istoj ili sličnoj razini obrazovanja, na zadnjoj godini studija, što je i bilo poželjno. Oni su već do tada trebali obraditi gradivo problemskih zadataka na fakultetu i biti upoznati sa raznim metodama rješavanja istih. Za učestalost rješavanja problemskih zadataka kroz osnovnu školu i kroz akademsko obrazovanje, odgovori su se dosta razlikovali, a dva najučestalija odgovora bila su „malo“ i „prilično“ kod Hrvatskih studenata za obje kategorije obrazovanja te kod Čeških studenata za osnovnoškolsko obrazovanje. Najučestaliji odgovori Čeških studenata za učestalost rješavanja problemskih zadataka kroz akademsko obrazovanje bili su „rijetko“ i „prilično“, što je vrlo kontradiktorno. Odgovori na ova pitanja se evidentno razlikuju od mišljenja svakog pojedinog ispitanika u kojoj mjeri su obrađivali gradivo problemskih zadataka u odnosu na mjeru za koju oni misle da je ispravna. Tako je nekim ispitanicima malo obrađivati to gradivo jedan ili dva semestra, misle da bi se trebalo opširnije obraditi, dok je drugima puno i taj jedan ili dva semestra.

Kod odabira najučestalije korištenih metoda pri rješavanju problemskih zadataka, uočava se razlika između korištenih metoda prilikom osnovnoškolskog i akademskog obrazovanja. Na fakultetu su ispitanici upoznali još neke metode koje nisu koristili u osnovnoj školi, tako se odgovorima „metodom postavljanja formule“ i „skiciranjem“, kroz akademsko obrazovanje pridružio i odgovor „metodom grafičkog prikaza“. Iz odgovora je vidljivo i da su se Hrvatski ispitanici susreli sa još nekim metodama poput „izradom tablice ili dijagrama“ te „pisanjem pomoćnog zadatka“. Kroz rješavanje zadanih problemskih zadataka mogao se dobiti uvid u snalaženju pri rješavanju zadataka različitim metodama. Tako se odgovori na prethodno pitanje za Češke se ispitanike nisu pokazali pouzdani, zato što su zadane

problemske zadatke oni riješili većinom postavljanjem jednadžbe, za razliku od Hrvatskih ispitanika kod kojih je većina, uz jednadžbu i skicirala/grafički prikazala zadatak.

Prvi zadatak je velika većina ispitanika riješila i grafičkim prikazom, od tri zadana zadatka, ovaj je bio u najvećoj mjeri skiciran na različite načine. Svaki je ispitanik drugačije vizualizirao zadatak te ga tako skicirao. Zacijelo je ispitanicima bilo lagano grafički prikazati suodnos između bilježnice i pernice zato što je razlika u cijeni „duplo manja“ što se vizualno lako predoči i prikaže na papiru. Da je razlika bila četveroduplo, peteroduplo manja, također bi se moglo tako prikazati, ali se ne bi odmah uočilo da je četveroduplo ili peteroduplo manje tako lako kao što se uočava duplo manje. Jedan od ispitanika riješio je zadatak grafičkim prikazom točno, međutim, kada je postavio jednadžbu, krivo je podijelio dva broja i automatski je rješenje cijelog zadatka pogrešno. Pri rješavanju bilo kakvih zadataka potrebno je jasno pročitati zadatak i shvatiti što se u zadatku traži te nakon rješavanja, provjeriti rješenje. Dakle, ispitanik koji je točno riješio prvi put se nekako smeo te nije shvatio da predaje dva različita rješenja za jedan zadatak zato što ga nije naknadno provjerio. Ovakve greške često se događaju kod djece i uvijek ih učitelji ispravljaju te govore kako se sve što se riješi treba prekontrolirati, međutim to se može dogoditi svakome. Ispitanici, kao budući učitelji trebaju biti dosljedni te svojim primjerom dati djeci do znanja kako raditi i učiti.

Drugi zadatak su ispitanici većinom rješavali postavljanjem jednadžbe. Za razliku od prvog zadatka, ovaj zadatak se ne može odmah u glavi vizualizirati, treba se nacrtati da bi se lakše predočio. I Hrvatski i Češki ispitanici su uvrstili zadane brojeve u jednadžbe sa tri nepoznanice te tako riješili zadatak. Nema neke određene razlike u rješavanju jednadžbi, a ovaj zadatak su svi riješili točno.

Treći zadatak su svi ispitanici koji su i skicirali zadatak, to učinili na jako sličan način. Skicirali su crtu/lentu podijeljenu na pet dijelova te je rješenje bilo vidljivo samim crtežom. Većina ispitanika zadatak je riješila na samo jedan način (nekoliko njih je na dva) pa samim time može se reći da im više nije bilo zanimljivo rješavati zadatke. Što se tiče samih zadataka i metoda koje su se koristile, može se zaključiti kako su ispitanici iz Republike Hrvatske u većoj mjeri riješili zadatke pomoću dvije različite metode, za razliku od ispitanika iz Češke Republike.

## 9. ZAKLJUČAK

Za rješavanje problemskih zadataka često je potrebna opširnija razina znanja i razmišljanja kako se takvi zadaci ne bi svrstali u jedan kalup za rješavanje. Problemski zadaci mogu biti izazovni učenicima, ali rješavanjem istih, učenici proširuju svoje vidike te razvijaju kreativnost, sigurnost i samopouzdanje u svoj rad, samostalnost te stječu matematičke kompetencije. Potiču djecu na analiziranje, logičko razmišljanje te povezivanje problema. Kao što i prva definicija problemskog zadatka kaže, učenici sami trebaju pronaći metodu koja je prikladna za pojedini zadatak, što učenicima pomaže i u lakšem snalaženju u stvarnim, do tada nepoznatim, situacijama. „Problemski zadatak je svaki zadatak za koji osoba koja ga rješava nema unaprijed ponuđenu metodu ili proceduru koju jednostavno primjenjuje, već samo rješavanje iziskuje iznaženje metoda, kao i samog rješenja.“ (Schoenfeld, 1985) Neki matematičari poput Polye, Descartesa istražili su metode rješavanja problemskih zadataka. Descartes je došao do zaključka kako ne može postojati univerzalna metoda rješavanja problemskih zadataka, ne iziskuje svaki zadatak isti način razmišljanja pa se tako ni pri rješavanju svih problemskih zadataka ne može ići u istom smjeru. Polya je, predloživši četiri koraka koja će pomoći pri rješavanju zadataka, samo dao model koji može poslužiti kao primjer, dakle, koraci koji mogu biti samo smjernice koje pomažu u općem oblikovanju. Problemski zadaci prisutni su i u raznim vanjskim vrednovanjima, poput TIMSS i PISA istraživanja. Republika Hrvatska i Češka Republika sudjelovale su u tim istraživanjima i pokazale relativno dobre rezultate. Cilj ovog diplomskog istraživanja bio je uočiti postoje li razlike pri rješavanju problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i u Češkoj. Ispitanici, kao budući učitelji, trebaju biti upoznati sa raznim metodama rješavanja problemskih zadataka te bi trebali biti motivirani u prenošenju znanja kategorije problemskih zadataka svojim budućim učenicima. Djeci su često učitelji uzor i ako oni vide da učitelj sa strašću i predanošću njima nešto prenosi, i oni će se zanimati za to. Rezultati ovog istraživanja se ne mogu generalizirati na razine prethodno navedene dvije države zato što uzorak koji je dobiven nije dovoljan za to. Rezultati ne pokazuju nekakvu značajnu razliku kod ove dvije skupine ispitanika, većina ih je bila upoznata sa istim strategijama za rješavanje zadataka. Ipak, pri samom rješavanju zadataka se pokazalo da su ispitanici iz Hrvatske bili malo kreativniji te su češće rješavali zadatke grafičkim prikazom, od ispitanika iz Češke, kod kojih je također grafički prikaz bio prisutan, ali ne u tolikoj mjeri. Ovo istraživanje može poslužiti kao poticaj za druga istraživanja slične tematike.

## 10. LITERATURA

1. Arambašić, Pavlin-Bernardić, Vlahović-Štetić. 2008. *Children's solving of mathematical word problems: The contribution of working memory*. Odjel za psihologiju Sveučilišta u Zagrebu. Zagreb
2. Baranović, Cindrić,. 2015. *O razvoju geometrijskog mišljenja u nastavi matematike prema van Hiele-ovoj teorij*. Simpozijum matematike i primjene. Matematički fakultet. Beograd  
[file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/O razvoju geometrijskog misljenja u nast.pdf](file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/O%20razvoju%20geometrijskog%20misljenja%20u%20nast.pdf)  
(10.10.2020.)
3. Cindrić, M. 2019. *Problemska nastava matematike*. Sveučilište u Zadru.  
[www.matematika.hr/index.php/download\\_file/582/297/](http://www.matematika.hr/index.php/download_file/582/297/) (28.10.2020.)
4. Bašić, M. 2017. *Realistično matematičko obrazovanje*. Sveučilište u Zagrebu. Zagreb  
<https://meria-project.eu/sites/default/files/MERIA%20Zagreb%20-%20RME.pdf>  
(18.9.2020.)
5. Bašić, Milan Šipuš. 2018. *Zašto istraživački usmjerena nastava matematike*. Sveučilište u Zagrebu. Zagreb  
[https://www.zrss.si/kupm2018/wp-content/uploads/2018/07/plenarno-basic\\_milin-sipus-web.pdf](https://www.zrss.si/kupm2018/wp-content/uploads/2018/07/plenarno-basic_milin-sipus-web.pdf) (30.7.2020.)
6. Boaler,J. 2017. *Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics. London
7. Crnjac, D. 2013. *Teorije učenja matematike*. Sveučilište J.J. Strossmayera. Osijek
8. <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/CRN09.pdf> (15.10.2020.)
9. Drijvers, Van den Heuvel- Panhuizen. 2014. *Realistic Mathematics Education*. Nizozemska.  
[https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/rme\\_encyclopaediamathed.pdf](https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/rme_encyclopaediamathed.pdf)  
(18.9.2020.)
10. Glavaš, Stašćik. 2019. *Esej iz matematike*. Poučak vol.20, br.79.  
[file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/4\\_Stascik\\_Glavas.pdf](file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/4_Stascik_Glavas.pdf) (15.10.2020.)
11. Harris, K. 2018. *New Math: The Curriculum That Failed Students And Teachers*.  
<https://groovyhistory.com/remember-new-math> (28.10.2020.)

12. Hsu, Wei-Min. 2013. *Examining the Types of Mathematical Tasks Used to Explore the Mathematics Instruction by Elementary School Teacher*. National Pingtung University of Education. Taiwan
13. Kurnik, Z. 2000. *Iz rječnika metodike: Matematički zadatak*. MIŠ. <https://mis.element.hr/fajli/96/01-03.pdf> (10.10.2020.)
14. Kurnik, Z. 2000. *Iz rječnika metodike: Matematički zadatak*. MIŠ. <https://mis.element.hr/fajli/260/15-02.pdf> (30.8.2020.)
15. Kurnik, Z. 2004. *Zadaci s više načina rješavanja*. HMD. Zagreb
16. Mendek, Ž. 2004. *Uspješnost rješavanja problemskih matematičkih zadataka kod predškolaca i učenika 1.razreda*. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu. Zagreb <file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/213692.ZeljkaMendek.pdf> (14.8.2020.)
17. Miljković, Rijavec, Vizek-Vidović, Vlahović-Štetić. 2014. *Psihologija obrazovanja*. IEP-Vern. Zagreb
18. Narodne novine. 2019. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html) (30.10.2020.)
19. Oconnor, Robertson. 2002. *Georg Polya*. University of St Andrews. Škotska <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/> (30.7.2020.)
20. PISA [https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?plotter=h5&primaryCountry=CZE&tres\\_hold=5&topic=PI](https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?plotter=h5&primaryCountry=CZE&tres_hold=5&topic=PI) (30.7.2020.)
21. Polya, G. 1966. *Kako riješiti matematički zadatak*. Školska knjiga. Zagreb
22. Rivera, L., M. 1996. *The effect of mental computation instruction on third grade mathematics students*. Columbia University. New York.
23. Schoenfeld, A. 1982. *Expert and Novice Mathematical Problem Solving. Final Project Report and Appendices B-H*. ERIC. New York
24. Silver, Stein. 1996. *The Quasar Project: The "Revolution of the Possible" in Mathematics Instructional Reform in Urban Middle Schools*.
25. Sharma, M. 2001. *Matematika bez suza, kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike*. Ostvarenje
26. Sullivan, P. 2009. *Constraints and Opportunities When using Content-specific Open-ended tasks*. Monash university. Melbourne
27. Sullivan, P. 2010. *Learnign about selecting classroom tasks and structuring mathematics lessons from students*. Monash University. Melbourne.
28. TIMSS [https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11\\_IR\\_M\\_Chapter1.pdf](https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_M_Chapter1.pdf)

- (30.7.2020.)
29. TIMSS <http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement/distribution-of-mathematics-achievement/> (30.7.2020.)
30. TIMSS [https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2016/11/TIMSS\\_15\\_NOVO\\_29\\_11\\_16.pdf](https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2016/11/TIMSS_15_NOVO_29_11_16.pdf) (30.7.2020.)
31. TIMSS <http://timss2015.org/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-About-TIMSS-2015.pdf> (30.7.2020.)
32. Vizek-Vidović, Vlahović-Štetić. 1998. *Kladim se da možeš...psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Udruga roditelja „Korak po korak“. Zagreb
33. Vlahović-Štetić, V. 2009. *Matematika za život*. Dijete, škola, obitelj. Zagreb  
[http://www.korakpokorak.hr/upload/Dijete\\_skola\\_obitelj/dijete\\_skola\\_obitelj\\_24.pdf](http://www.korakpokorak.hr/upload/Dijete_skola_obitelj/dijete_skola_obitelj_24.pdf)  
(7.9.2020.)
34. Vrdoljak, D. 2015. *George Polya- doprinos matematičkoj edukacij*. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu. Zagreb
35. Yeo, J. 2007. *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. National Institute of Education. Singapur

## 11. PRILOG- upitnik

### Rješavanje problemskih zadataka

Drage kolegice i kolege, molim Vas da ispunite ovaj kratki upitnik o iskustvima rješavanja problemskih zadataka te da zatim riješite tri zadatka, u svrhu mog diplomskog rada na temu "Usporedba rješavanja problemskih zadataka kod studenata Učiteljskog studija u Hrvatskoj i Češkoj". Zadatke riješite prvo grafički, a zatim ih riješite koristeći brojevni izraz.

1. Koja ste godina studija? (1., 2., 3., 4., 5.)
2. Koliko često ste se susreli sa problemskim zadacima kroz Vaše osnovnoškolsko obrazovanje? (Nimalo, Vrlo malo, Malo, Prilično, Potpuno)
3. S kojim metodama rješavanja problemskih zadataka ste se susreli kroz svoje osnovnoškolsko obrazovanje? (višestruk odabir) Metodom postavljanja formule, Metodom pokušaja i pogrešaka, Metodom grafičkog prikaza, Skiciranjem, Izradom tablice ili dijagrama, Pisanjem pomoćnog zadatka, Nešto drugo(nadopiši)
4. Koliko često ste se susreli sa problemskim zadacima kroz Vaše akademsko obrazovanje? (Nimalo, Vrlo malo, Malo, Prilično, Potpuno)
5. S kojim metodama rješavanja problemskih zadataka ste se susreli kroz svoje akademsko obrazovanje? (višestruk odabir) Metodom postavljanja formule, Metodom pokušaja i pogrešaka, Metodom grafičkog prikaza, Skiciranjem, Izradom tablice ili dijagrama, Pisanjem pomoćnog zadatka, Nešto drugo(nadopiši)

Sljedeća tri zadatka riješite tako da ga prvo grafički prikazete, a zatim ga postavite i broičano riješite.

Molim Vas da svoj postupak predočite na papiru koji ćete zatim priložiti u odgovor.

6. Ivana je u trgovini potrošila 36 kuna i kupila je 2 bilježnice i jednu pernicu. Ako jedna bilježnica košta duplo manje nego pernica, koliko košta jedna bilježnica i pernica?
7. Zbroj tri broja je 45. Prvi broj je za 15 veći od drugog broja, a treći broj je za 3 manji od prvog broja. Koji su to brojevi?

8. Kada je biciklist prešao 16 km i još petinu svojeg cijelog puta stigao je na cilj. Kolika je duljina cijelog puta što ga je prešao ta biciklist?
9. Na koji način Vam je bilo lakše riješiti zadatke i zašto?
10. Dodatno pitanje za ispitanike iz Češke- Molim Vas da napišete nekoliko rečenica o vašem matematičkom obrazovanju i praksi kroz akademsko obrazovanje.

Zahvaljujem svima na rješavanju. Ukoliko imate kakvo pitanje, možete mi se obratiti putem maila [situmara@gmail.com](mailto:situmara@gmail.com)



## 12. ŽIVOTOPIS

Mara Šitum rođena je 1.2.1997. godine u Splitu, Republika Hrvatska. Po nacionalnosti je Hrvatica te ima hrvatsko državljanstvo. Svoje obrazovanje započela je u Osnovnoj školi „Trstenik“ u Splitu od 2003.-2011.godine. 2011.godine upisuje Drugu gimnaziju Split, smjer jezična gimnazija te ju završava 2015.godine kada upisuje Sveučilište u Zadru, Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja- Učiteljski studij. Na navedenom studiju odabire pojačani modul- hrvatski jezik i književnost. Uz materinski jezik- hrvatski, jako dobro poznaje i aktivno se služi engleskim jezikom, (C1 razina), a pasivno poznaje i talijanski, njemački i španjolski jezik. Dobro poznaje rad u Microsoft Office programima.

Od drugih vještina i kompetencija, ističe se aktivno volontiranje u klubu „Otvori srce“ Druge gimnazije Split okrunjeno priznanjem volontera i udruga Grada Splita, kao i Druge gimnazije Split za rad i osobit doprinos. Izdvaja se i volontiranje dvije godine u udruzi „Zvono“ u Splitu, gdje je smišljala i sudjelovala u predstavama, kao i raznim kreativnim radionicama, sudjelovanje u humanitarnoj akciji na razini grada Splita „Split-otvori srce“, akcija „72 sata bez kompromisa“ te sudjelovanje na nacionalnoj konferenciji „Pokreni sebe, promijeni svijet“ 2014.godine u Zagrebu. Volontiranjem je stekla otvorenost, kreativnost te timski duh. Od 2014.-2018.godine radila je administrativne u Postaji prometne policije Split gdje je stekla znanje pri radu na računalu te odgovornost i spremnost na stresne situacije. Od 2018.-2020. radila je u trgovini „Comma“ gdje je kao prodavač usavršila vještine komunikacije i snalažljivosti. Uz to, radila je i promocije za „Pip“ tvrtku te kao punjač polica za „Podravka“ tvrtku. 2020.godine odlazi na razmjenu studenata u sklopu „Erasmus +“ programa u Češku Republiku, u Prag gdje upoznaje način života druge kulture i naroda. Tamo usavršava engleski jezik te se otvara prema njoj novim i nepoznatim situacijama i okolnostima.