

Razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i predškolske dobi

Škare, Rosanda

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zadar / Sveučilište u Zadru**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:162:648276>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-27**



Sveučilište u Zadru
Universitas Studiorum
Jadertina | 1396 | 2002 |

Repository / Repozitorij:

[University of Zadar Institutional Repository](#)



Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja

Sveučilišni diplomski studij

Rani i predškolski odgoj i obrazovanje

Rosanda Škare

**Razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i
predškolske dobi**

Diplomski rad

Zadar, 2024.

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za predškolski odgoj

Sveučilišni diplomski studij

Rani i predškolski odgoj i obrazovanje

Razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i predškolske dobi

Diplomski rad

Student/ica:

Rosanda Škare

Mentor/ica:

Doc. dr. sc. Maja Cindrić

Zadar, 2024.



Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, **Rosanda Škare**, ovime izjavljujem da je moj **diplomski** rad pod naslovom **Razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i predškolske dobi** rezultat mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Ni jedan dio mojega rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mojega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada.

Zadar, 17. rujna 2024.

Sažetak

Tema rada „Razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i predškolske dobi“ fokusiran je na razumijevanje procesa učenja i razvoja algebarskog koncepta kod djece u dobi od rane djece do predškolske dobi. U radu se želi istražiti kako se osnovni matematički koncepti poput uzoraka, jednakosti, varijabli i promjenljivosti formiraju i razvijaju u ovim ranim fazama djetinjstva te kako se ti temelji mogu postaviti na način koji će podržati daljnje učenje matematike u kasnijim fazama obrazovanja. Kroz razumijevanje razvoja algebarskog razmišljanja kod djece u ranoj dobi, cilj je identificirati strategije i pristupe koji će omogućiti nastavnicima i roditeljima da podrže i potaknu matematički razvoj djece na način koji je prilagođen njihovim individualnim potrebama i sposobnostima. Cilj ovog rada je istražiti i analizirati razvoj algebarskog koncepta kod djece rane i predškolske dobi te pružiti dublje razumijevanje o tome kako se taj razvoj može podržati i potaknuti kroz različite aktivnosti i pristupe u obrazovnom okruženju.

Ključne riječi: *predmatematičke vještine, ustanova ranog odgoja i obrazovanja, Algebra koncept, metodička načela*

Summary

DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC CONCEPTS IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION

The theme of the paper, "Development of Algebraic Concepts in Early Childhood Education," focuses on understanding the learning process and development of algebraic concepts in children from early childhood to preschool age. The paper aims to explore how fundamental mathematical concepts such as patterns, equality, variables, and variability are formed and developed during these early stages of childhood, and how these foundations can be laid in a way that supports further learning of mathematics in later stages of education. By understanding the development of algebraic thinking in young children, the goal is to identify strategies and approaches that will enable teachers and parents to support and encourage the mathematical development of children in a manner tailored to their individual needs and abilities. The objective of this paper is to investigate and analyze the development of algebraic concepts in early and preschool-age children and to provide a deeper understanding of how this development can be supported and encouraged through various activities and approaches in the educational environment.

Keywords: *pre-mathematical skills, early childhood education institution, algebraic concept, methodological principles*

Sadržaj

Sažetak.....	0
Summary.....	0
1. UVOD.....	1
2. PREDMATEMATIČKE VJEŠTINA KOD DJECE.....	2
2.1. Metodika razvoja početnih matematičkih pojmova.....	3
2.2. Metodička načela u razvoju matematičkih pojmova kod predškolske djece.....	6
2.3. Predmatematičke vještine u ranom i predškolskom odgoju.....	9
3. MATEMATIČKI SADRŽAJI U RANOM I PREDŠKOLSKOM OBRAZOVANJU....	11
3.1. Čimbenici usvajanja.....	11
3.3. Uloga igre u učenju matematičkog koncepta u ranom i predškolskom razvoju.....	23
4. ALGEBRA U RANIM GODINAMA.....	26
4.1. Primjena koncepta algebre u ranim i predškolskim ustanovama.....	27
4.2. Uzorci kao temelj algebraičkog razmišljanja.....	29
4.3. Matematičke situacije i strukture.....	34
4.4. Modeli kvantitativnih odnosa.....	36
4.5. Promjene koncepta u matematici.....	38
5. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA.....	40
6. ZAKLJUČAK.....	43
LITERATURA.....	45

1. UVOD

Algebarski koncept, iako se često percipira kao apstraktna disciplina koja se proučava u kasnijim fazama obrazovanja, ima svoje temelje već u ranom djetinjstvu. Razumijevanje osnovnih algebarskih pojmova i principa započinje već u ranoj i predškolskoj dobi, a iskustva i aktivnosti u ovoj fazi života mogu snažno utjecati na buduće razumijevanje matematike. U ranom djetinjstvu, djeca su prirodno sklonija konkretnom i intuitivnom razmišljanju. Ovo razdoblje karakterizira istraživanje, igra i manipulacija s fizičkim predmetima. Kroz igru s blokovima, kockama, igračkama za sortiranje i oblikovanje, djeca razvijaju osnovne koncepte kao što su veličina, oblik, boja i količina. Ovi su koncepti ključni za kasnije razumijevanje algebarskih pojmova poput varijabli, jednakosti i promjenljivosti.

Jedan od ključnih elemenata u razvoju algebarskog razmišljanja kod male djece je razumijevanje uzoraka. Igranje s uzorcima, kao što su nizovi boja, oblika ili veličina, pomaže djeci da prepoznaju osnovne matematičke principe kao što su ponavljanje, redosljed i simetrija. Kroz aktivnosti poput slaganja, crtana uzoraka ili korištenja manipulativnih materijala poput perlica, djeca razvijaju osjećaj za strukturu i organizaciju, što su ključni elementi algebarskog razmišljanja. Osim toga, važno je poticati verbalno izražavanje matematičkih ideja.

Postavljanje otvorenih pitanja poput "Što misliš da će se dogoditi sljedeće?" ili "Kako možemo organizirati ove predmete?" potiče djecu da verbaliziraju svoje misli i razumijevanje. Kroz ovakav dijalog, djeca ne samo da razvijaju svoje matematičke vještine, već i uče kako komunicirati i argumentirati svoje ideje. Ključno je također pružiti djetetu iskustva s manipuliranjem simbola i znakova. Ovo uključuje korištenje crteža, simbola i riječi kako bi se predstavili matematički koncepti. Na primjer, crtanje jednostavnih grafikona ili korištenje simbola poput "+" i "-" pomaže djeci da povežu konkretne situacije s apstraktnim matematičkim pojmovima.

Treba je napomenuti da je svako dijete jedinstveno i da će se razvoj algebarskog razmišljanja razlikovati ovisno o njihovim individualnim sposobnostima i iskustvima. Stoga je važno prilagoditi aktivnosti i pristup u skladu s potrebama i interesima djeteta.

2. PREDMATEMATIČKE VJEŠTINA KOD DJECE

U razvoju djeteta, predmatematičke vještine imaju ključnu ulogu. One predstavljaju temelj za kasnije usvajanje matematičkih koncepta i pružaju osnovu za razumijevanje matematike kao discipline. Bitno je razumjeti da se ove vještine počinju oblikovati već u najranijoj dobi djeteta, a socijalna okolina u kojoj dijete odrasta ima značajan utjecaj na taj proces. Socijalna okolina, uključujući obitelj, vršnjake i odgojno-obrazovne ustanove poput dječjih vrtića, igra ključnu ulogu u razvoju pozitivnog stava prema matematici i poticanju predmatematičkih vještina.

Djeca koja su izložena poticajnom okruženju u kojem se matematika promatra kao zanimljiva i korisna imaju veću vjerojatnost da će razviti pozitivan stav prema njoj. Osim toga, podrška i angažman roditelja i odgajatelja ključni su za poticanje interesa djeteta za matematiku i stvaranje temelja za njen daljnji razvoj. Dječji vrtić, kao važna ustanova za rani odgoj i obrazovanje, ima poseban značaj u razvoju predmatematičkih vještina kod djece. On predstavlja prostor u kojem djeca provode značajan dio svog vremena, učeći kroz igru, interakciju s vršnjacima i vođene aktivnosti (Čudina-Obradović, 2008).

Stoga je ključno da dječji vrtić pruža poticajno okruženje koje je prilagođeno potrebama i interesima djece, roditelja te kulture i društvene sredine u kojoj djeluje. Organizacija dječjeg vrtića i njegovo okruženje igraju ključnu ulogu u odgojnom procesu i razvoju djeteta. Fleksibilnost, kreativnost i individualizirani pristup u radu s djecom omogućuju stvaranje optimalnih uvjeta za razvoj predmatematičkih vještina. Kroz strukturirane igre, aktivnosti i zadatke, djeca stvaraju temelje za daljnje usvajanje matematičkih koncepta u osnovnoj školi (Malašić, 2015).

Svako dijete jedinstveno i ima svoje individualne potrebe i sposobnosti. Stoga je nužno da ustanove za rani odgoj i obrazovanje pružaju podršku i resurse koji će omogućiti svakom djetetu da razvije svoj puni potencijal. Poticajno okruženje, kvalitetni odnosi s odgajateljima i vršnjacima te prilagođeni programi ključni su za uspješan razvoj predmatematičkih vještina

kod djece. U odgoju i obrazovanju djece predškolske dobi, uloga odgajatelja je od presudne važnosti. Odgajatelj ima zadaću poticati djecu na razvijanje predmatematičkih vještina, osiguravajući im igre i izazove koji će potaknuti njihovu sposobnost usvajanja tih vještina. Za uspjeh u ovom zadatku, odgajatelj mora posjedovati teorijsko i praktično znanje o radu s djecom mlađe i predškolske dobi te imati sposobnost procijeniti potencijal svakog djeteta za usvajanje predmatematičkih vještina. Nužno je razumjeti da okruženje djeteta u ustanovi za rani odgoj i obrazovanje igra ključnu ulogu u njegovom razvoju. To okruženje se dijeli na fizičko, odnosno prostorno okruženje, te socijalno okruženje (Golinkoff, Hirsh-Pasek, Singer, 2006). Prostor u vrtiću i dostupni materijali moraju biti prilagođeni djetetu kako bi ga poticali na istraživanje i aktivno sudjelovanje u svojem razvoju.

Odgajatelj ima ključnu ulogu u organizaciji prostora i odabiru materijala s ciljem stvaranja poticajnog okruženja u kojem će dijete moći učiti samostalno. To uključuje postavljanje različitih zona u prostoru koje potiču različite vrste aktivnosti, kao što su igra, istraživanje, kreativnost i društvena interakcija. Materijali trebaju biti dostupni i prilagođeni razvojnoj razini djeteta, potičući ih na istraživanje i eksperimentiranje (Ljubetić, 2009). Osim organizacije prostora i odabira materijala, odgajatelj ima ulogu u vođenju aktivnosti koje potiču razvoj predmatematičkih vještina.

To uključuje igre i zadatke koji potiču brojanje, klasificiranje, prepoznavanje oblika i uzoraka te razumijevanje osnovnih matematičkih pojmova (Mlinarević, 2004). Bitno je prilagoditi te aktivnosti individualnim potrebama i interesima svakog djeteta kako bi se osiguralo njihovo maksimalno angažiranje i učenje. Osim direktnih aktivnosti usmjerenih na razvoj predmatematičkih vještina, odgajatelj ima ulogu u promicanju matematičkog razmišljanja u svakodnevnim situacijama. To uključuje postavljanje pitanja koja potiču logičko razmišljanje, rješavanje problema i primjenu matematičkih koncepata u svakodnevnim aktivnostima poput igre, priče ili obroka.

2.1. Metodika razvoja početnih matematičkih pojmova

Razvoj početnih matematičkih pojmova predstavlja ključni dio obrazovnog procesa u ranom djetinjstvu. Ovaj proces nije samo osnova za daljnje razumijevanje matematike, već

ima i šire implikacije na kognitivni razvoj djeteta. Metodika razvoja početnih matematičkih pojmova, kao interdisciplinarno znanstveno područje, integrira spoznaje iz različitih disciplina kako bi pružila temelje za učinkovito učenje i razvoj djece (Bognar, 200). Osnovni pristup metodike razvoja početnih matematičkih pojmova temelji se na interakciji između predškolske pedagogije, psihologije, matematike, metodike, didaktike, sociologije i logike (Kadum, Kadum 2019). Svi ovi elementi zajedno doprinose razumijevanju kako djeca percipiraju i usvajaju matematičke koncepte u ranoj dobi te kako ih najbolje podučavati. Pristup Pamela Liebeck, izložen u njezinom metodičkom priručniku „Kako djeca uče matematiku“, nudi koristan okvir za razumijevanje procesa usvajanja matematičkih pojmova kod djece. Model ISZG (iskustvo, govorni jezik, slike, pismeni znakovi) identificira ključne faze koje dijete prolazi kako bi razumjelo matematiku.

Prva faza, iskustvo fizičkih predmeta (I), naglašava važnost konkretnih iskustava u učenju matematike. Djeca trebaju imati priliku manipulirati stvarnim predmetima kako bi razvila osnovno razumijevanje matematičkih pojmova.

Druga faza, govorni jezik (G), ističe važnost verbalne komunikacije u procesu učenja. Kroz verbalizaciju svojih iskustava, djeca razvijaju jezične alate koji im pomažu u artikulaciji matematičkih koncepta.

Treća faza, slike (S), podrazumijeva korištenje vizualnih pomagala kako bi se konceptualizirala apstraktna matematička načela. Kroz slike i vizualne reprezentacije, djeca mogu bolje razumjeti apstraktne matematičke pojmove.

Konačno, četvrta faza, pismeni znakovi (Z), uvodi djecu u svijet simbola i matematičke notacije. Kroz upotrebu simbola i pisanih znakova, djeca proširuju svoje razumijevanje matematike i sposobnost komuniciranja matematičkih ideja.

Važno je naglasiti da ovaj model nije linearni proces, već se faze često preklapaju i međusobno potpomažu. Također, prilagođavanje ovih faza individualnim potrebama i razvojnim karakteristikama djece ključno je za uspješno učenje. Nastanak pojma lopte kod djeteta predstavlja složen proces u kojem se integriraju različite faze razumijevanja i predstavljanja. Ovaj proces možemo analizirati kroz Brunerovu teoriju koja naglašava tri osnovne faze: akcijsku (I), ikonsku (S) i simboličku (G i Z). Kroz ove faze, dijete postepeno razvija sve složenije razumijevanje pojma lopte, od osjetilnog iskustva do povezivanja s riječima i simbolima (Slunjski, 2006).

U početnoj akcijskoj fazi (I), dijete interaktivno istražuje loptu kroz različite senzorne i motoričke aktivnosti. Dodirom, držanjem, kotrljanjem, čak i lizanjem i bacanjem, dijete stječe osnovno iskustvo o fizikalnim karakteristikama lopte. Ovaj direktni kontakt omogućuje mu da razvija osjećaj za oblik, teksturu, težinu i druge osobine lopte. Kroz ove aktivnosti, dijete ne samo da se zabavlja već i intuitivno uči o svojoj okolini. U sljedećoj ikonskoj fazi (S), dijete počinje povezivati vizualne slike lopte s njihovim akcijskim iskustvom. Primjećuje razliku između stvarne lopte i slika lopte, ali prepoznaje zajedničke karakteristike koje definiraju pojam "lopta". Ova faza omogućuje djetetu da počne razumijevati da se isti koncept može predstaviti na različite načine, što je ključno za kasnije razumijevanje apstraktnih pojmova (Klarin, 2015).

U fazi simboličkog predstavljanja (G i Z), dijete počinje povezivati zvuk riječi "lopta" s konkretnim objektom. Kroz interakciju s okolinom, dijete uči da riječ "lopta" označava objekt s kojim se igra. Ovaj proces je ključan jer povezuje konkretni objekt s verbalnim simbolima, omogućujući djetetu da komunicira o lopti s drugima. Kasnije, u fazi Z, dijete će početi povezivati vizualne simbole (slova) s zvukom riječi "lopta", stvarajući temelj za čitanje i pisanje.

Kroz sve ove faze, primjećujemo Brunerovu ideju postupnog prelaska od konkretnog iskustva do apstraktnog razumijevanja. Akcijsko predstavljanje odgovara direktnom iskustvu s fizičkim predmetima poput lopte, dok ikonsko predstavljanje omogućuje djetetu da prepozna zajedničke karakteristike između stvarnih objekata i njihovih slika. Simboličko predstavljanje uvodi verbalne i pismene simbole, omogućujući djetetu da komunicira i razumije svijet na složeniji način. U procesu razvoja matematičkih sposobnosti kod djece, svakodnevno iskustvo igra ključnu ulogu (Čudina-Obradović, 2008).

Kroz spontano uočavanje i slobodan izbor, djeca počinju formirati osnovne koncepte koji su temelj razumijevanja matematike. Pridruživanje, jedan od prvih koraka u ovom procesu, omogućuje djeci da prepoznaju zajedničke osobine i koriste ih kako bi naučila pravilnu upotrebu jezika. Na primjer, kada djeca razvrstavaju igračke ili sudjeluju u igrama koje zahtijevaju pridruživanje, ona počinju shvaćati koncepte poput veličine, oblika, boje i drugih karakteristika. Međutim, proces učenja matematike kod djece ide dalje od pridruživanja.

Matematiku također uče kroz složenije aktivnosti poput razvrstavanja, sparivanja i nizanja. Razvrstavanje, na primjer, nije samo pasivno grupiranje predmeta po zajedničkim osobinama, već zahtijeva analizu i promišljanje kako bi se odredile odgovarajuće kategorije. Sparivanje, s

druge strane, potiče razumijevanje pojmova broja i jednostavne matematičke operacije poput dodavanja i oduzimanja. Nizanje, također važna aktivnost, omogućuje djeci da shvate redoslijed i logičko slaganje.

Montague Smith, Cotton, et.all. 2018 ističe da su matematički pojmovi često temeljeni na predmetima, objektima i pojavama koje djeca susreću u svakodnevnom životu. Ovo iskustvo postavlja osnovu na kojoj se gradi razumijevanje apstraktnijih matematičkih koncepata. Kroz interakciju s svojom socijalnom okolinom, djeca ne samo da stječu konkretna iskustva, već i razvijaju sposobnost povezivanja tih iskustava s matematičkim konceptima.

Važnost svakodnevnog iskustva u razvoju matematičkih sposobnosti kod djece ne može se previdjeti. Svijet koji ih okružuje, kao i socijalna interakcija s drugima, pružaju im bogat izvor informacija i prilika za učenje. Stoga, podržavanje djece u istraživanju i manipulaciji s predmetima i situacijama iz stvarnog svijeta može imati značajan utjecaj na razvoj njihovog logičko-matematičkog mišljenja i sposobnosti zaključivanja. Kroz ove aktivnosti, djeca ne samo da stječu matematičke vještine, već i razvijaju kritičko razmišljanje i sposobnost rješavanja problema, što su ključne kompetencije za uspjeh u školi i životu uopće (Marendić, 2010).

2.2. Metodička načela u razvoju matematičkih pojmova kod predškolske djece

U kontekstu odgoja i obrazovanja predškolske djece, razvoj matematičkih pojmova predstavlja ključni segment koji zahtijeva pažljivo planiranje i primjenu metodičkih smjernica kako bi se osiguralo uspješno učenje. Metodička načela služe kao temeljne smjernice za oblikovanje obrazovnog procesa te se temelje na poznavanju kognitivnog razvoja, karakteristika učenja te potreba i sposobnosti djece (Bognar, 200). Jedno od ključnih metodičkih načela je životno iskustvo djeteta. Svako dijete dolazi s različitim životnim iskustvima i pozadinama, stoga je važno prilagoditi sadržaje kako bi bili relevantni i razumljivi za svako dijete. Ovo načelo potiče odgajatelje da koriste svakodnevne situacije i predmete iz okoline djeteta kako bi povezali apstraktne matematičke pojmove s stvarnim životnim primjerima (Copley, 2000).

Izbjegavanje prisiljavanja djeteta na točan odgovor također je ključno metodičko načelo. Umjesto naglaska na „ispravnom“ odgovoru, važnije je poticati djecu da razmišljaju, istražuju i eksperimentiraju s matematičkim konceptima. Ovo potiče razvoj kritičkog mišljenja i samopouzdanja kod djece te im omogućuje da steknu dublje razumijevanje matematike. Postupnost je također važno načelo koje se odnosi na progresivno uvođenje složenijih matematičkih koncepata kako bi se osiguralo postupno i temeljito razumijevanje. Razvojna primjerenost nadovezuje se na ovo načelo, naglašavajući važnost prilagodbe matematičkih metoda i materijala prema razvojnim fazama djeteta. Opservacija i praćenje djece omogućuju odgajateljima da individualiziraju svoj pristup i prilagode sadržaj prema potrebama svakog djeteta. Stvaranje poticajnog, stimulirajućeg i motivirajućeg okruženja dodatno potiče dječju znatiželju i motivaciju za učenje matematike (Bognar, 2000).

Osiguravanje raznovrsnog broja resursa za učenje osigurava da su djeci dostupni različiti alati i materijali kako bi istraživali i razvijali svoje matematičke vještine na različite načine. Učenje matematike nije samo proces prenošenja znanja, već i razvojna avantura koja zahtijeva pažljivo vođenje kako bi se potaknula radoznalost, samopouzdanje i razumijevanje (Marendić, 2009). Prvo načelo koje želimo istaknuti je "načelo aktivnosti". Ono zahtijeva da se učenje matematike temelji na trajnoj dječjoj aktivnosti. To znači poticanje djece da budu aktivni sudionici u svom učenju, umjesto pasivnih primatelja informacija. Kroz aktivnosti poput igara, istraživanja i rješavanja problema, djeca postaju angažirana i motivirana za učenje (Liebeck, 1995).

Drugo načelo, "načelo individualizacije", naglašava važnost prilagođavanja učenja matematike prema potrebama i mogućnostima svakog pojedinog djeteta. Svako dijete ima svoj tempo u učenju i razumijevanju matematike, stoga je ključno prilagoditi sadržaj kako bi se osiguralo da svako dijete napreduje prema svojim sposobnostima (Berk, 2008). Načelo postupnosti, treće u nizu, uvjetovano je psihološkom činjenicom da se određeno gradivo ne može naučiti ako prethodno nisu shvaćeni relevantni sadržaji. Ovdje je važno voditi djecu kroz postupni proces razumijevanja, počevši od jednostavnih koncepata i postupno prelazeći na složenije.

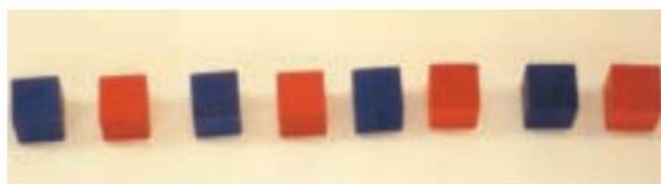
Načelo objektivne realnosti ističe važnost povezivanja matematičkih pojmova s kvantitativnim odnosima u stvarnom svijetu. Kroz primjere iz svakodnevnog života, djeca mogu bolje razumjeti apstraktne matematičke pojmove i primijeniti ih na različite situacije. Bitno je također naglasiti važnost povezivanja matematičkih sadržaja s djetetovim iskustvom i

svakodnevnim problemima. Kroz ovo povezivanje, djeca mogu lakše razumjeti i primijeniti matematiku u svom životu, što dodatno motivira njihovo učenje.

Kako bismo potaknuli aktivno sudjelovanje djece u učenju matematike, važno je izbjegavati prisiljavanje na ispravne odgovore i umjesto toga poticati razmjenu ideja među djecom. Ohrabrujući njihovo autonomno razmišljanje i samostalno rješavanje problema, odgajatelji stvaraju poticajno okruženje u kojem djeca mogu razvijati svoje matematičke vještine (Malašić, 2015). Važno je da se matematika usvaja postepeno, sukladno djetetovom razumijevanju i mogućnostima. Svako dijete ima svoj ritam u učenju i potrebno je posvetiti pažnju primjerenosti njihovog razvoja za određeni stadij učenja. Uvođenje matematike u odgojno-obrazovni proces zahtijeva ne samo razumijevanje same suštine matematičkih pojmova, već i duboko poimanje dječjeg razvoja i sposobnosti opservacije od strane odgojitelja. Prema Slunjski, 2006, odgojitelji su ključni akteri u prepoznavanju razvojnih trenutaka djece te procjeni razine razvijenosti pojedinih matematičkih pojmova. Ovo nije samo obveza, već i odgovornost koja utječe na kvalitetu odgojno-obrazovnog procesa.

Sustavno praćenje djece u svakodnevnim aktivnostima omogućuje odgojiteljima da stvore individualizirane strategije učenja prilagođene svakom djetetu. To uključuje prepoznavanje različitih razvojnih stadija, specifičnih potreba i interesa djece te prilagodbu pedagoških metoda kako bi se potaknuo razvoj matematičkih vještina na optimalan način. Ključno je stvoriti poticajno okruženje koje će potaknuti dječju znatiželju i eksperimentiranje. Ovakvo okruženje osigurava raznolike resurse i materijale koji potiču istraživački pristup učenju matematike.

Od blokova za građenje do igara s brojevima, svaki materijal može biti prilagođen kako bi podržao razvoj određenih matematičkih pojmova. Na primjer, upotreba abaka ili brojnih igara može pomoći u razumijevanju osnovnih aritmetičkih operacija, dok geometrijski oblici mogu biti predstavljeni kroz različite oblike i teksture materijala (Došen-Dobud, 1995). Osim materijalnih resursa, važno je stvoriti i motivirajući kontekst učenja. To uključuje integraciju matematike u svakodnevne aktivnosti, poput pripreme hrane, igre na otvorenom ili umjetničkih projekata. Kroz ove aktivnosti, djeca mogu primijeniti svoje matematičke vještine u stvarnom svijetu, što im daje osjećaj svrsishodnosti i motivacije za učenje.



Slika 1 Blok u nizu

Izvor; https://resourcebinderecse.weebly.com/uploads/2/0/1/3/20133951/algebra_in_the_ec_years.pdf
(1.6.2024.)

Osposobljavanje odgojitelja ključno je u ostvarivanju ovih ciljeva. Edukacija odgojitelja trebala bi obuhvatiti ne samo razumijevanje matematičkih koncepata i metoda poučavanja, već i strategije za promicanje razvoja matematičkih vještina kod djece. To može uključivati različite pristupe učenju, diferencirane instrukcijske tehnike i metode procjene prilagođene individualnim potrebama djece.

2.3. Predmetematičke vještine u ranom i predškolskom odgoju

U ranoj i predškolskoj dobi, razvoj matematičkih kompetencija kod djece ključan je za njihov cjelokupni razvoj. Prema Klarin, 2015, poticanje djeteta na korištenje matematičkog mišljenja u svakodnevnim aktivnostima i situacijama igra ključnu ulogu u tom procesu. Važno je stvoriti okruženje koje potiče istraživanje, ispitivanje, otkrivanje i zaključivanje, te omogućiti djetetu da kroz vlastito iskustvo uči i razvija se. Matematički pojmovi su prisutni u mnogim aktivnostima djeteta, a svakodnevno se koriste, što ukazuje na važnost integracije matematike u različite aspekte djetetovog života.

Lott, et.all. 2000 ističe da je ključno omogućiti djeci cjelovita, autentična iskustva koja imaju smisla, jer se kroz takva iskustva najbolje uči. Kako bi se potaknuo cjelovit razvoj djeteta, važno je koristiti aktivnosti koje omogućuju integraciju različitih područja učenja, kao što naglašava (Montague Smith, Cotton, et.all. 2018). Druženje djece različite dobi i sposobnosti također je od izuzetne važnosti jer potiče suradnju, učenje jednih od drugih i razvoj socijalnih vještina. Učenje u ranom djetinjstvu nije linearni proces, već se odvija spiralno, s obzirom na individualne sposobnosti i ritam svakog djeteta.

Stoga je bitno osigurati fleksibilno planiranje vremena za aktivnosti u vrtiću, kao i prostor koji je bogat i poticajan za istraživanje i stvaranje. Potrebno je osnažiti samoinicirane aktivnosti djece te im pružiti potrebnu podršku odgajatelja i vršnjaka. Bitno je naglasiti da djeca trebaju biti podrška jedni drugima, kako bi se potaknula suradnja i razvoj u zoni proksimalnog razvoja (Ljubetić, 2009). Kroz zajedničko učenje i podršku, djeca imaju priliku razvijati svoje matematičke kompetencije, ali i socijalne vještine koje su ključne za uspješan razvoj.

Često se matematika percipira kao složena disciplina koja zahtijeva apstraktno razmišljanje i duboko razumijevanje koncepta. Međutim, osnova za stjecanje matematičkih kompetencija leži u predmatematičkim vještinama. Kroz razvoj ovih temeljnih sposobnosti, poput prepoznavanja oblika, brojeva i uzoraka, stvara se čvrsta platforma koja omogućava dublje razumijevanje matematičkih koncepta (Soucie, 2013). Prema Copley, (2000), kontinuirani razvoj matematičkih kompetencija odvija se kroz uravnoteženo preplitanje različitih matematičkih procesa.

Prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema te primjena tehnologije čine osnovu na kojoj se gradi razumijevanje matematike. Ovi procesi ne samo da potiču apstraktno razmišljanje, već i razvijaju kritičko mišljenje i sposobnost rješavanja problema, što su ključne vještine za uspjeh u svim područjima života. Matematičke kompetencije ne ograničavaju se samo na konkretna područja kao što su brojevi, algebra, oblik i prostor, mjerenje i podaci. One prožimaju sve aspekte obrazovanja i odgoja. Na primjer, kroz matematičke probleme, djeca uče kako postavljati hipoteze, tražiti rješenja i provjeravati njihovu ispravnost, što ih uči sistematičnom pristupu rješavanju problema (Marendić, 2010). Osim toga, matematika potiče razvoj kreativnosti kroz traženje alternativnih načina rješavanja problema i pronalaženje uzoraka i simetrija u različitim kontekstima.

Bitno je istaknuti da matematika ne služi samo kao sredstvo za stjecanje znanja, već i kao alat za razvoj vještina i stavova. Kroz procese poput argumentiranja i zaključivanja, djeca uče kako izražavati svoje ideje jasno i uvjerljivo, razvijajući tako vještine komunikacije i samopouzdanje. Također, matematika potiče djecu da budu uporni i istrajni u rješavanju problema, što su ključne osobine za postizanje uspjeha u bilo kojem području života. U svjetlu sve veće digitalizacije društva, primjena tehnologije postaje neizostavan dio matematičkog obrazovanja. Korištenje računalnih programa, interaktivnih igara i drugih digitalnih alata ne samo da čini učenje matematike zanimljivijim i privlačnijim, već i

omogućava djeci da razvijaju digitalne kompetencije koje su neophodne u suvremenom svijetu.

3. MATEMATIČKI SADRŽAJI U RANOM I PREDŠKOLSKOM OBRAZOVANJU

3.1. Čimbenici usvajanja

Učenje matematike nije samo proces usvajanja brojeva, formula i geometrijskih oblika. Ono zahtijeva temeljnu pripremu koja uključuje razvoj predmatematičkih vještina i razumijevanje stupnja kognitivnog razvoja djeteta. Kao što Lott, et.all. 2000 ističe, pokušaj učenja matematike bez razvijenih predmatematičkih vještina može biti kao hvatanje balona bez uzice - koncepti mogu lako „odletjeti“. Stoga je bitno sagledati proces učenja matematike kroz više dimenzija, uzimajući u obzir individualne karakteristike svakog djeteta.

Prvi ključni faktor u učenju matematike je stupanj kognitivnog razvoja djeteta. Kognitivne sposobnosti djeteta, kao što su apstraktno razmišljanje, logičko zaključivanje i sposobnost rješavanja problema, imaju ključnu ulogu u procesu usvajanja matematičkih koncepata. Svako dijete ima svoj tempo razvoja i individualne potrebe, stoga je važno prilagoditi sadržaj tako da odgovara razini razumijevanja svakog pojedinca. Kroz razumijevanje kognitivnog razvoja, odgajatelji mogu prilagoditi strategije poučavanja kako bi potaknuli razvoj djetetovih sposobnosti (Mlinarević, 2004).

Drugi važan faktor je matematička osobnost djeteta. Svako dijete ima svoj odnos prema matematici - neki je doživljavaju kao izazov, dok je drugima možda manje privlačna. Razumijevanje ove osobnosti pomaže odgajateljima prilagoditi pristup učenju kako bi motivirali djecu i potaknuli njihovu znatiželju i samopouzdanje. Treći faktor su predmatematičke vještine. Ove vještine, kao što su prepoznavanje oblika, razumijevanje veličina i prostornih odnosa te razvoj brojnih predstava, osiguravaju čvrstu osnovu za daljnje učenje matematike (Samuelsson, Johansson, 2006).

Kroz igru, praktične aktivnosti i manipulativne materijale, djeca razvijaju ove vještine koje su ključne za uspješno savladavanje matematičkih koncepata. Četvrti faktor je matematički jezik. Razumijevanje matematičkog jezika i simbola omogućuje djeci da precizno komuniciraju matematičke ideje i rješavaju probleme. Kroz kontekstualiziranje i praktične primjene, djeca razvijaju sposobnost čitanja, pisanja i interpretacije matematičkih izraza (Moses, 2001).

Stupnjevi poznavanja matematike igraju važnu ulogu u procesu učenja. Svako dijete prolazi kroz različite faze u usvajanju matematičkih koncepata, a razumijevanje ovih faza pomaže odgajateljima prilagoditi sadržaj kako bi podržali individualne potrebe svakog djeteta. U procesu učenja matematike svako dijete predstavlja jedinstvenu kombinaciju kognitivnih strategija, perceptivnih sposobnosti i individualnih preferencija (Golinkoff, Hirsh-Pasek, Singer, 2006). Prepoznavanje i razumijevanje tih razlika ključno je za stvaranje poticajnog okruženja koje potiče razvoj matematičkih sposobnosti kod svakog djeteta.

U tom kontekstu, koncept matematičke osobnosti pruža vrijedan okvir za razumijevanje različitih pristupa učenju. Matematička osobnost djeteta odražava način na koji pojedinac percipira i rješava matematičke probleme, te kako obrađuje matematičke informacije. Primjerice, algebarski tipovi preferiraju metodički pristup rješavanju problema, koristeći se postupnim analitičkim pristupom. S druge strane, geometrijski tipovi obrađuju informacije vizualno i holistički, preferirajući intuitivno razumijevanje (Bognar, 200).

Bitno je istaknuti da se matematičke osobnosti ne mogu svrstati u strože kategorije, već predstavljaju dinamičan i fluidan koncept. Kroz interakciju s materijalom, okolinom i iskustvom učenja, djeca mogu razvijati i mijenjati svoje preferencije i strategije učenja (Peteh, 2008). Nadalje, razumijevanje matematičkih osobnosti djeteta ima duboke implikacije za pedagošku praksu. Individualizirani pristup učenju, koji uzima u obzir specifičnosti svakog djeteta, ključan je za poticanje uspješnog matematičkog razvoja.

Procjena učitelja o tome koje strategije djece koriste i zašto omogućavaju prilagodbu sadržajnih metoda i resursa kako bi se potaknula optimalno. Nadalje, uvažavanje različitih matematičkih osobnosti potiče inkluzivno učenje i stvara poticajno okruženje u kojem se cijeni raznolikost pristupa i perspektive. Predmatematičke vještine predstavljaju ključnu komponentu u razvoju djeteta, ne samo kao budućeg matematičara, već i kao osobe koja će uspješno funkcionirati u sve kompleksnijem svijetu.

Ove vještine, iako se ne direktno odnose na matematiku kao predmet, čine temelj za usvajanje matematičkih koncepata i mogu biti presudne u razumijevanju mnogih drugih predmeta,

posebno unutar STEM područja (Moses, 2001). U predškolskoj dobi, kroz igru i svakodnevne aktivnosti, djeca neposredno dolaze u dodir s osnovnim matematičkim konceptima. Odnosima u prostoru, kao što su unutra-vani, gore-dolje, ili ispod-iznad, te odnosima predmeta, poput većemanje i lako-teško, djeca razvijaju osnovno razumijevanje apstraktnih pojmova (Vlahović, 2009). Također, kroz manipulaciju predmetima i aktivnosti poput mehaničkog brojanja, brojanja pridruživanjem i prepoznavanja brojeva, stječu se osnovne vještine koje su neophodne za daljnje učenje matematike (Slunjski, 2012). Treba spomenuti da se predmatematičke vještine ne razvijaju spontano, već zahtijevaju sustavan pristup u odgojno-obrazovnom kontekstu. Odgajatelji i roditelji imaju ključnu ulogu u tome. Kroz podršku i poticaj, mogu stvoriti okruženje koje potiče istraživanje i povezivanje različitih područja znanja. Uvođenje STEM pristupa u obrazovanje daje dodatnu dimenziju, potičući djecu na interdisciplinarno učenje i razmišljanje. Kombinacija matematike s drugim znanstvenim disciplinama omogućuje djeci da shvate kako se koncepti primjenjuju u stvarnom svijetu.

Međutim, osim u formalnom odgojnom kontekstu, važno je da se djeci prenese pozitivan stav prema matematici i pokaže im se kako je matematika prisutna u svakodnevnom životu. Kroz primjere iz okoline, djeca mogu shvatiti važnost matematike u različitim situacijama, što može potaknuti njihov interes i motivaciju za učenje. Predmatematičke vještine predstavljaju temeljne sposobnosti koje su ključne za razvoj matematičkih koncepta i razumijevanje matematičkih operacija. One pomažu u formiranju osnovnih matematičkih sposobnosti kod djece i pružaju temelj za daljnje učenje matematike.

Ove vještine često su prisutne u aktivnostima predškolske dobi i rane dječje dobi te imaju važnu ulogu u kognitivnom razvoju. Jedna od najvažnijih predmatematičkih vještina je razvrstavanje podataka i predmeta. To uključuje sposobnost grupiranja predmeta prema njihovim zajedničkim karakteristikama ili svojstvima. Djeca koja razviju ovu vještinu mogu lakše razumjeti koncepte kao što su klasifikacija i kategorizacija, što je važno za kasnije učenje matematike, poput algebraičkih operacija (Slunjski, 2006).

Razvoj djetetove kognitivne sposobnosti, posebno u domeni razvrstavanja podataka i predmeta, predstavlja fascinantan proces koji proizlazi iz interakcije između genetske predispozicije i okoline. Prije nego što dijete usvoji apstraktan pojam broja, njegovo promatranje svijeta oko sebe započinje kroz razvrstavanje predmeta prema njihovim obilježjima, bilo da su kvantiteti (Marendić, 2010). Na početku ovog procesa dijete počinje prepoznavati i razvrstavati predmete s kojima dolazi u kontakt na temelju njihovih fizičkih karakteristika.

Primjerice, igračke se mogu razlikovati prema boji, obliku ili veličini. Ovo razvrstavanje može biti uzlazno ili silazno - dijete može početi s malim skupom predmeta koje prepoznaje i postupno ih proširivati na veće skupove. Bitno je napomenuti da proces razvrstavanja uključuje i sposobnost ujedinjavanja različitih obilježja kako bi se identificirale općenite vrste predmeta. Primjerice, dijete može primijetiti da su svi automobili "vozila" ili da su sve životinje "živa bića". Ovaj pristup od dijelova prema cjelini pokazuje razumijevanje hijerarhijske strukture svijeta oko nas (Peteh, 2008). Uspoređivanje i ujednačavanje predmeta i skupova također su ključne vještine. Djeca koja mogu uspoređivati veličine, oblike, boje i druge karakteristike predmeta mogu razviti osjećaj za relacije i proporcije, što je bitno za razumijevanje osnovnih matematičkih operacija poput zbrajanja, oduzimanja i mjerenja (Vlahović Kovačić, 1999). Uspoređivanje i ujednačavanje predmeta i skupova predstavlja ključnu vještinu u razvoju matematičkog razumijevanja kod djece.

Ova sposobnost omogućuje im da prepoznaju međuodnose između različitih skupova predmeta, što je temeljni korak ka razumijevanju osnovnih matematičkih koncepta poput brojeva, operacija i relacija. U ranoj fazi razvoja, djeca počinju uspoređivati i ujednačavati predmete na temelju njihovih osjetilnih svojstava kao što su veličina, oblik, boja i tekstura. Na primjer, dijete može uspoređivati broj kamenčića u dvije hrpe ili veličinu dva voća. Ovi su zadaci često konkretne prirode i omogućuju djetetu da koristi svoja osjetila i manipulira predmetima kako bi uspostavilo međuodnose.

Kako dijete raste i stječe više iskustva s manipuliranjem predmetima i sastavljanjem skupova, sposobnost uspoređivanja i ujednačavanja postaje sve sofisticiranija. Dijete počinje prepoznavati obrasce i relacije između različitih skupova predmeta. Na primjer, dijete može primijetiti da su dvije hrpe kamenja jednake ako imaju isti broj kamenčića, bez obzira na njihovu veličinu ili oblik. Ovo je ključni korak prema razumijevanju koncepta jednakosti i ekvivalencije u matematici (Slunjski, 2016).

Jedan od važnih aspekata u razvoju ove vještine je razumijevanje konzervacije količine. Konzervacija se odnosi na sposobnost da se prepozna da se količina neke tvari ne mijenja samo zato što se njezin izgled mijenja. Na primjer, dijete koje razumije konzervaciju količine shvatit će da se količina vode u čaši ne mijenja samo zato što se čaša izlije u drugu čašu različitog oblika. Osim konkretnih predmeta, djeca također počinju primjenjivati svoje vještine uspoređivanja i ujednačavanja na apstraktnije koncepte poput brojeva. Oni počinju

prepoznavati da se brojevi mogu uspoređivati i ujednačavati na isti način kao i fizički predmeti.

Na primjer, dijete može shvatiti da su dva skupa od tri jabuke jednaka ako oba skupa imaju tri jabuke, bez obzira na raspored tih jabuka (Samuelsson, Johansson, 2006). Ova sposobnost uspoređivanja i ujednačavanja predmeta i skupova ključna je za razumijevanje mnogih matematičkih koncepta kao što su brojevi, operacije, algebarski izrazi i geometrija. Bez ove osnovne vještine, djeca bi imala poteškoća u razumijevanju složenijih matematičkih koncepta i rješavanju problema. Nizanje predmeta i održavanje zadanog redoslijeda također su važne vještine. To uključuje sposobnost postavljanja predmeta u logički redoslijed ili slijed, što je osnova za razumijevanje koncepta brojeva i operacija poput množenja i dijeljenja. Nizanje i održavanje redoslijeda odnosi se na raspoređivanje predmeta u jedan niz prema zadanom redoslijedu. Sastavljanje nizova kao i održavanje redoslijeda odnosi se kako na kvantitativna, tako i na kvalitativna obilježja (Klarin, 2015).

Slijeđenje niza uputa od više koraka također je ključno za razvoj matematičkih vještina. Djeca koja mogu pratiti seriju koraka u nekom zadatku ili problemu mogu razviti sposobnost rješavanja problema i razumijevanja matematičkih procesa. Učenje aritmetičkih postupaka, proceduralnih dijelova algebre i razumijevanje geometrijskih dokaza zahtijeva razvoj određenih kognitivnih sposobnosti, ali i vještina u slijeđenju uputa. Kako bi dijete moglo uspješno usvojiti ove koncepte, ključno je da razvije sposobnost pažljivog praćenja uputa u određenom redoslijedu.

Da bi se to postiglo, važno je da dijete počne razvijati ove vještine već u ranom djetinjstvu, uključujući svakodnevne aktivnosti. U praksi, roditelji i odgajatelji mogu koristiti strategije koje potiču dijete da razvije sposobnost slijeđenja uputa. Evo nekoliko koraka koje mogu primijeniti (Vlahović, 2009):

- **Jednostavne upute:** Počnite s jednostavnim uputama koje su jasne i koncizne. Na primjer, "Stavi igračku u kutiju" ili "Operi ruke sapunom". Ove osnovne upute pomažu djeci da razviju početnu razumijevanje redoslijeda radnji.
- **Postupno povećavanje složenosti:** Kako dijete postaje udobnije u slijeđenju jednostavnih uputa, postupno povećavajte složenost. Na primjer, "Stavi knjigu na stol, zatim zatvori vrata ormara." Ovo pomaže u razvoju sposobnosti praćenja više koraka.

- **Vizualne upute:** Koristite vizualne pomagala poput slika ili dijagrama kako biste dodatno podržali razumijevanje uputa. Na primjer, za slijeđenje uputa vezanih uz matematiku, možete koristiti ilustracije ili manipulativne materijale koji pomažu u konkretnom razumijevanju matematičkih koncepata.
- **Učenje kroz igru:** Integriranje slijeđenja uputa u igre i zabavne aktivnosti može dodatno motivirati dijete i olakšati učenje. Na primjer, igre poput "Simon kaže" ili slagalice koje zahtijevaju slijeđenje koraka mogu biti korisne.
- **Pohvala i ohrabrivanje:** Pohvalite dijete kada uspješno slijedi upute kako bi ga motivirali i ojačali samopouzdanje. Ohrabrivanje pozitivnog ponašanja pomaže u stvaranju pozitivne asocijacije s procesom učenja.

Kada dijete razvije sposobnost pažljivog slijeđenja uputa u svakodnevnim situacijama, može lakše prenijeti ove vještine na matematičke koncepte. Matematika često zahtijeva slijed logičkih koraka, pa je sposobnost pažljivog praćenja uputa ključna za uspjeh u ovom području. Orijehtiranje i organiziranje u prostoru igraju važnu ulogu u razvoju prostornog razumijevanja, što je ključno za geometriju i druge grane matematike. Orijehtacija i prostorna percepcija igraju ključnu ulogu u djetetovom razvoju i učenju matematike (Golinkoff, Hirsh-Pasek, Singer, 2006).

Kroz proces sazrijevanja, djeca postupno razvijaju sposobnost uočavanja prostornih odnosa, što im omogućuje da bolje razumiju matematičke koncepte poput geometrije, mjerenja i algebre. Prva faza u razvoju prostorne percepcije kod djeteta počinje s njegovim vlastitim tijelom kao referentnom točkom. Djeca u ovoj fazi percipiraju prostor i objekte oko sebe u odnosu na sebe. Ova egocentrična perspektiva omogućuje im da se orijentiraju u prostoru koristeći svoje tijelo kao referencu (Vlahović Vizek Vidović Sudžuka, 1998).

Na primjer, dijete može razumjeti da je igračka ispred njih ako ju mogu dodirnuti ili da je nešto iznad njih ako moraju podignuti ruke da bi to dohvatili. Ova osnovna svijest o prostoru omogućuje djetetu da počne istraživati svoju okolinu i uspostavljati osnovne prostorne odnose. U drugoj fazi, dijete počinje prenositi svoju referentnu točku na druge ljude ili objekte u svom okruženju. To znači da dijete razvija sposobnost shvaćanja da drugi ljudi imaju svoje položaje i perspektive u prostoru.

Na primjer, dijete može shvatiti da se igračka nalazi ispred njih, ali može se nalaziti s lijeve strane drugog djeteta. Ova sposobnost da se prepoznaju različite perspektive u prostoru

pomaže djetetu da razvije kompleksnije razumijevanje prostornih odnosa i interakcija. U trećoj fazi, koja označava napredniju razinu razvoja prostorne percepcije, dijete postaje svjesno da prostor i predmeti oko njih nisu statični. Umjesto toga, razumiju da se položaj objekata može promijeniti ovisno o situaciji ili kontekstu (Copley, 2000).

Na primjer, dijete može shvatiti da se stolac može pomaknuti iz jedne sobe u drugu ili da se igračka može premjestiti s jednog mjesta na drugo. Ova fleksibilnost u shvaćanju prostornih odnosa omogućuje djetetu da razvije apstraktnije razumijevanje geometrijskih i prostornih koncepta, što je ključno za učenje matematike. Kako ove faze razvoja prostorne percepcije utječu na učenje matematike? Pa, osnovna svijest o prostoru omogućuje djeci da bolje razumiju pojmove kao što su položaj, udaljenost, smjer i oblik. Kroz razumijevanje prostornih odnosa, djeca mogu lakše vizualizirati matematičke probleme i rješavati ih. Na primjer, razumijevanje koncepta "ispred" i "iza" pomaže im da rješavaju probleme s usporedbom veličina ili redosljeda (Ljubetić, 2009). Također, sposobnost razlikovanja različitih perspektiva u prostoru omogućuje im da bolje razumiju geometrijske oblike i njihove karakteristike.

Uz to, razvoj fleksibilnosti u shvaćanju prostornih odnosa omogućuje djeci da se lakše prilagode različitim matematičkim situacijama i problemima. Mogu lakše prepoznati obrasce, rješavati probleme s položajem i manipulirati geometrijskim figurama. Ova sposobnost prilagodbe ključna je za napredno razumijevanje matematičkih koncepta i primjenu istih u različitim kontekstima. Vještine poput vizualizacije, vizualnog grupiranja predmeta i prepoznavanja obrazaca također su bitne za razumijevanje matematičkih koncepta i rješavanje problema (Mlinarević, 2004).

Vizualizacija igra ključnu ulogu u našem razumijevanju svijeta i rješavanju problema. Ona nam omogućuje da apstraktne informacije i odnose pretvorimo u vizualne oblike koji nam postaju pristupačniji i razumljiviji. Ova sposobnost nije samo korisna u svakodnevnim situacijama, već je i od izuzetne važnosti u kontekstu obrazovanja, razvoja kreativnosti te kognitivnog razvoja djece. Jedan od ključnih aspekata vizualizacije je sposobnost pojedinca da manipulira i transformira vizije i mentalne slike (Klarin, 2015).

Kada osoba posjeduje ovu sposobnost, ona može efikasnije razmišljati o problemima, generirati nove ideje te pronaći rješenja na kreativan način. Djeca koja razvijaju snažnu sposobnost vizualizacije imaju prednost jer imaju lakši pristup rješavanju problema te mogu

brže stvarati nove mentalne slike, što im omogućuje da se lakše prilagode različitim situacijama. Sposobnost vizualizacije također je povezana s kreativnošću. Kroz vizualizaciju, pojedinac može promatrati stvari iz različitih perspektiva, povezivati ih na nove načine te generirati originalne ideje.

Kreativnost se često očituje u sposobnosti da se razmišlja izvan okvira i da se pronalaze inovativna rješenja, a vizualizacija pruža alate za ostvarivanje ovih ciljeva. Jedan konkretan primjer vizualizacije je vizualno grupiranje predmeta. Ova sposobnost omogućuje pojedincu da uoči i identificira broj predmeta u skupu tako što ih vizualno poveže (Liebeck, 1995). Kada dijete savlada ovu vještinu, postaje manje ovisno o manipulativnom materijalu poput brojeva ili prstiju te se oslanja na svoju sposobnost vizualizacije. Umjesto da broji svaki predmet pojedinačno, dijete može jednostavno prepoznati broj predmeta u skupu i povezati ih s odgovarajućim brojem. Ova vještina ne samo da olakšava proces brojanja, već i potiče brže i efikasnije razumijevanje količina te razvija sposobnost apstraktnog mišljenja.

Procjenjivanje, deduktivno i induktivno mišljenje su ključne kognitivne vještine koje omogućuju djeci da donose zaključke i rješavaju probleme na temelju raspoloživih informacija. Ove vještine pomažu u razvoju logičkog razmišljanja i analitičkih sposobnosti, što je ključno za uspješno rješavanje matematičkih problema i primjenu matematičkih koncepta u različitim situacijama. Prvo, treba razumjeti da matematička vještina prepoznavanja i proširivanja obrazaca ključna je za razvoj djetetove sposobnosti analize i sinteze (Marendić, 2010).

Prepoznavanje obrazaca omogućuje djetetu da identificira redoslijed brojeva ili oblika te da predvidi sljedeći u nizu. Ovaj proces potiče razvoj logičkog razmišljanja i sposobnost apstraktnog razmišljanja. Kroz igru s različitim oblicima i brojevima, djeca stječu osjećaj za njihove karakteristike i mogu ih primijeniti u raznim situacijama. Procjenjivanje, kao dio matematičke aktivnosti, također je ključno za razvoj dječje matematičke kompetencije. Dijete koje je sposobno procijeniti odgovor na matematički problem prije nego što ga izračuna pokazuje razumijevanje temeljnih konceptata i sposobnost primjene matematike u stvarnim situacijama.

Bitno je naglasiti da se procjenjivanje ne svodi samo na pronalaženje točnog rješenja, već i na razumijevanje procesa rješavanja problema i mogućih varijacija. Procjenjivanje kao približavanje dodatno potiče fleksibilnost u razmišljanju. Naučiti dijete da koristi

jednostavnije podatke kako bi došlo do grube procjene odgovora pruža mu alate za brže i efikasnije rješavanje problema. Ova sposobnost pomaže djetetu da razvije strategije za suočavanje s kompleksnim matematičkim zadacima i da izgradi samopouzdanje u svoje matematičke vještine.

Kontrola rezultata putem procjenjivanja ključna je za razvoj djetetove sposobnosti samoprocjene i samokontrole. Kroz postavljanje kriterija za procjenu i usporedbu procijenjenog rezultata s točnim, dijete razvija osjećaj za preciznost i pouzdanost u svoj rad. Ova vještina presudna je ne samo u matematičkom kontekstu, već i u širem spektru životnih situacija gdje je važno procijeniti i kontrolirati rezultate svojih postupaka. U razumijevanju razvoja ljudskog uma, posebno u djetinjstvu, ključno je istražiti procese deduktivnog i induktivnog mišljenja. Ovi su procesi temeljna komponenta kognitivnog razvoja i omogućuju nam da donosimo logičke zaključke i shvatimo svijet oko sebe na sve složenije načine (Peteh, 2008). Deduktivno mišljenje, kako sugerira naziv, kreće se od općeg prema pojedinostima. Ova vrsta razmišljanja omogućuje nam da izvučemo logičke zaključke na temelju postavljenih općih načela ili pretpostavki.

Kroz razvoj, djeca prolaze kroz različite faze u kojima se njihovo deduktivno mišljenje postupno oblikuje. U početku, njihove su dedukcije često povezane s konkretnim situacijama i objektima. No s vremenom, kako njihova sposobnost apstraktnog razmišljanja raste, počinju uočavati međudnose između objekata, razumiju uzrok i posljedicu te mogu stvarati složenije logičke zaključke. Kao vrhunac ovog razvoja ističe se njihovo razumijevanje definicija, dokaza, teorema te sposobnost stvaranja zaključaka i formiranja hipoteza.

S druge strane, induktivno mišljenje podrazumijeva zaključivanje od pojedinačnog ka općem, odnosno izvlačenje općenitih zaključaka iz pojedinačnih činjenica. Ova vrsta mišljenja također prolazi kroz evoluciju tijekom djetinjstva. Djeca počinju primjećivati obrasce i trendove iz okoline te na temelju tih pojedinačnih promatranja izvode općenite zaključke. Bitno je istaknuti da matematički jezik igra ključnu ulogu u razvoju oba tipa mišljenja u djetinjstvu (Slunjski, 2006). Kroz matematičke koncepte poput razvrstavanja, nizanja, količinskih skupova te izražavanja prostornih odnosa, djeca stječu temelje za logičko razmišljanje. Matematički jezik omogućuje im da formaliziraju svoje zaključke i da ih izraze na precizan način.

3.2. Razvoj brojanja kod djece: Od ranog doba do predškolske dobi

Razumijevanje brojeva kod djece predstavlja ključni korak u njihovom matematičkom razvoju. Prije nego što se upuste u formalno učenje matematike, djeca stječu predmatematičke vještine koje im omogućuju osnovno razumijevanje brojeva i matematičkih koncepata. Prema Čudina-Obradović, 2008, djeca već u ranim fazama razvoja mogu razlikovati tri osnovna pojma broja: broj kao količinu, brojevnu riječ i brojku. Ovo razlikovanje omogućuje im da počnu percipirati brojeve kao apstraktne koncepte koji imaju različite uloge i značenja u svakodnevnom životu. Prvi pojam, broj kao količina, odnosi se na sposobnost prepoznavanja i označavanja količine predmeta u skupu. Na primjer, dijete može prebrojati koliko igračaka ima ili koliko je jabuka na stolu. Drugi pojam, brojeva riječ, povezan je s redoslijedom ili pozicijom predmeta u nekom nizu. Primjerice, brojeva riječ se koristi kada dijete navodi koji je redak u knjizi ili koji je redni broj osvojeno mjesto u natjecanju. Treći pojam, brojka, odnosi se na nominalno označavanje ili identifikaciju predmeta u okolini pomoću brojeva, kao što su broj autobusa ili adresa.

Dalje, Slunjski, 2012 ističe da su brojevi apstraktni koncepti s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu. Ovo naglašava važnost razvijanja "osjećaja za broj" ili "*number sense*" kako bi djeca stekla dublje razumijevanje brojeva i matematičkih koncepata. Osjećaj za broj, prema (Slunjski, 2016), obuhvaća razumijevanje, vještine i stavove o brojevima koji su razvijeniji od svakodnevnih sposobnosti rada s brojevima. To uključuje četiri ključne komponente prema Nacionalnom vijeću nastavnika matematike (NCTM) značenje broja, odnose među brojevima, veličinu broja te operacije s brojevima.

Stvaranje osjećaja za broj kod djece može se poticati raznovrsnim aktivnostima koje ih potiču da razmišljaju o brojevima na različite načine i u različitim kontekstima. To može uključivati igre, manipulativne materijale, priče, pjesme i druge aktivnosti koje potiču razmišljanje o brojevima na dubljoj razini. Brojanje je jedna od osnovnih matematičkih vještina koju djeca počinju razvijati već od najranijih dana života. Od brojalice koje im pjevaju roditelji do brojanja prstiju na rukama, djeca su neprestano okružena brojevima.

Malašić, 2015 ističe da već u dobi od dvije godine djeca počinju povezivati imena s brojevima te razvijaju sposobnost automatizma u prepoznavanju i povezivanju brojeva s količinama. U dobi od tri godine, djeca počinju razumjeti osnovna načela brojanja. Soucie, 2013 ističe tri osnovna načela: korespondenciju jedan prema jedan, stalnost redoslijeda brojeva i načelo kardinalnosti. Korespondencija jedan prema jedan znači povezivanje svakog objekta s jednim i samo jednim brojem.

Stalnost redoslijeda brojeva podrazumijeva da svaki broj ima prethodnika i sljedbenika te se taj redoslijed ne može mijenjati. Načelo kardinalnosti naglašava da posljednji broj u skupu predstavlja količinu u tom istom skupu. Daljnji razvoj u brojanju obuhvaća vještine kao što su brojanje unatrag i prema sekvencama. Prema istraživanju Kadum, Kadum 2019, petogodišnjaci su sposobni brojati unatrag od 10 te brojati od zadanog broja i zadanom intervalu. Osim toga, predškolska djeca mogu naučiti čitati i pisati brojeve, što je istaknuto u istraživanju (Marendić, 2009). Da bi djeca usvojila vještinu brojanja, moraju prvo savladati nekoliko temeljnih matematičko-logičkih načela. (Samuelsson, Johansson, 2006) kategorizirali su ta načela u dvije glavne kategorije: načela "kako brojiti" i načela "što brojiti". Načela "kako brojiti" odnose se na procese kao što su korespondencija i redoslijed brojeva, dok načela "što brojiti" naglašavaju važnost razumijevanja kardinalnosti i veza između brojeva i količina.

U razvoju matematičke pismenosti kod djece, važno je razumjeti osnovna načela brojenja koja služe kao temelji za daljnje razumijevanje matematike. Ova načela, koja obuhvaćaju načelo pridruživanja ili "jedan prema jedan", načelo kardinalnosti i načelo stabilnosti poretka, omogućuju djeci da usvoje koncepte brojenja i kvantiteta na intuitivan način. Načelo pridruživanja ili "jedan prema jedan" prva je faza u razvoju djetetova razumijevanja brojenja.

Ovo načelo odnosi se na sposobnost djeteta da shvati da svakom predmetu unutar skupa može pridružiti samo jedan broj. Kada dijete broji predmete, svakom od njih pridružuje jedan broj, osiguravajući da nijedan predmet nije preskočen ili dupliciran. Osim toga, dijete mora shvatiti da se pri brojanju redoslijed mora poštovati, ali da je svejedno od kojeg elementa će se krenuti (Wood, 1995). Na primjer, ako dijete broji igračke na podu, može započeti s bilo kojom igračkom i pridružiti broj svakoj igrački dok ih broji.

Nakon što dijete usvoji načelo pridruživanja, dolazi do razumijevanja načela kardinalnosti. Ovo načelo opisuje shvaćanje djeteta da zadnji broj prilikom brojanja označava koliko

predmeta u određenom skupu ima. Dijete shvaća da broj koji dodijeli zadnjem predmetu u skupu predstavlja količinu svih predmeta u tom skupu. Na primjer, ako dijete broji jabuke na stolu i dođe do broja "pet", tada razumije da u skupu ima pet jabuka. Ovo razumijevanje omogućuje djetetu da koristi brojenje kako bi odredilo količinu u skupu, kao i za usporedbu količina između dva skupa.

Načelo stabilnog poretka treće je važno načelo u razvoju djetetove matematičke pismenosti. Ovo načelo označava redoslijed brojeva, gdje svaki broj ima svog prethodnika i sljedbenika. Djeca koja razumiju ovo načelo mogu nesmetano brojiti i razumjeti nizove brojeva. Na primjer, ako dijete broji od jedan do deset, razumije da svaki broj slijedi nakon prethodnog i da se redoslijed ne mijenja. Ovo razumijevanje omogućuje djeci da grade osnovu za daljnje razumijevanje aritmetičkih operacija i algoritama (Došen-Dobud, 1995).

Razumijevanje brojeva ključno je za dječji kognitivni razvoj. Kroz proces brojenja, djeca stječu sposobnost prepoznavanja i manipuliranja brojevima te razumijevanja osnovnih matematičkih koncepata. Jedno od ključnih načela je načelo apstraktnosti. Ono implicira da se brojanje ne odnosi samo na konkretne predmete, već i na apstraktne pojmove poput boje, oblika, zvuka ili pokreta. To znači da dijete može brojati ne samo vidljive predmete poput igračaka ili voća, već i apstraktne koncepte poput zvukova u prostoriji ili pokreta tijela (Moses, 2001).

Ovo načelo omogućuje djetetu da primijeni brojanje u različitim situacijama i kontekstima, što je ključno za razumijevanje matematike u širem smislu. Drugo važno načelo je načelo nevažnosti rasporeda. Ono implicira da redoslijed u kojem se brojevi pojavljuju ne utječe na konačni rezultat brojanja. Drugim riječima, moguće je početi brojiti od bilo kojeg objekta u skupu, a konačan rezultat će ostati isti. Na primjer, ako brojimo jabuke u košari, možemo početi brojati s bilo koje jabuke i konačan rezultat će biti isti (Marendić, 2010). Ovo načelo olakšava djeci proces brojanja jer im omogućuje veću fleksibilnost i razumijevanje koncepta broja.

Peteh, 2008 navode niz drugih načela koja također igraju ključnu ulogu u razvoju djetetovog razumijevanja brojeva. Načelo pridruživanja, na primjer, odnosi se na sposobnost povezivanja broja s konkretnim predmetom ili skupom predmeta. Kardinalnost se odnosi na razumijevanje da zadnji broj koji se koristi za brojanje predstavlja količinu predmeta u skupu. Ova načela zajedno čine osnovu za daljnje razumijevanje matematičkih koncepata.

Među navedenim načelima, važno je istaknuti i načelo konzervacije. Ono se odnosi na shvaćanje da količina predmeta ostaje ista bez obzira na promjene u obliku ili rasporedu. Na primjer, ako prelijemo tekućinu iz jedne čaše u drugu, količina tekućine ostaje ista. Razumijevanje ovog načela ključno je za razvoj stabilnog koncepta broja i sposobnost manipuliranja kvantitetama (Kadum, Kadum 2019). Uz navedena načela, važno je također istaknuti ulogu praktičnih iskustava u razvoju djetetovog razumijevanja brojeva.

Aktivnosti poput brojanja igračkaka, sortiranja predmeta po boji ili obliku te rješavanja problema koji uključuju korištenje brojeva u stvarnom svijetu pomažu djeci da primijene teorijska načela u praksi i dublje razumiju koncepte broja.

3.3. Uloga igre u učenju matematičkog koncepta u ranom i predškolskom razvoju

Igra je vitalni dio djetinjstva, ne samo zbog zabave koju pruža, već i zbog dubokih procesa učenja i razvoja koji se odvijaju dok djeca istražuju svijet oko sebe. Igra pretvaranja i igre temeljene na pravilima posebno su važne u tom kontekstu, posebno u razvoju matematičkih vještina. Prvo, igra pretvaranja, poznata i kao maštovita igra ili igra uloga, predstavlja ključnu fazu u djetetovom razvoju.

U dobi od 3 do 6 godina, djeca uče kroz pretvaranje da se stvari mogu predstaviti kao nešto drugo, što zahtijeva sposobnost apstrakcije i simbolizacije. Na primjer, kada dijete simulira da je liječnik ili prodavač u imaginarnoj trgovini, koristi simbole i apstraktne koncepte kako bi stvorilo vlastitu stvarnost. Ova sposobnost simboliziranja temelj je matematičkog razmišljanja, gdje se apstraktni koncepti poput brojeva i operacija koriste za rješavanje problema (Slunjski, 2012). U igri pretvaranja, djeca se nalaze u zoni razvoja gdje se uče i razvijaju. Na primjer, kada dijete broji igračke ili dijeli ih s prijateljem u ulozu, koristi matematičke koncepte poput brojanja, uspoređivanja i dijeljenja (Vlahović, 2009).

S druge strane, igre temeljene na pravilima, kao što su društvene igre ili računalne igre, također su važan dio djetinjstva. Ove igre imaju specifična pravila i ciljeve te potiču razvoj kognitivnih vještina, uključujući i matematičke. Istraživanja su pokazala da igre s pravilima potiču kognitivni razvoj, osobito kod djece starije od 4 godine. Kroz sudjelovanje u igrama s pravilima, djeca uče o strukturi, uzrocima i posljedicama te razvijaju logičko razmišljanje i rješavanje problema - ključne komponente matematičkog razmišljanja (Slunjski, 2006).

Primjerice, mnoge društvene igre zahtijevaju strategiju, planiranje i rješavanje problema, što su sve matematičke vještine. U igri poput Monopolyja, djeca moraju pratiti novac, izračunavati vrijednosti nekretnina, i strategizirati kako maksimizirati profit. U računalnim igrama poput Minecrafta, djeca koriste prostorne i geometrijske koncepte dok grade svjetove i rješavaju probleme poput rasporeda resursa (Slunjski, 2016). Osim toga, igre temeljene na pravilima često su strukturirane oko matematičkih koncepta poput uzoraka, redoslijeda i numeričkih operacija. Djeca koja redovito sudjeluju u ovim igrama imaju veću izloženost matematičkim konceptima i stječu bolje razumijevanje istih. U ranom djetinjstvu, igra ima ključnu ulogu u razvoju djetetovih kognitivnih, emocionalnih i socijalnih sposobnosti. Međutim, često se zanemaruje važnost igre kao sredstva za učenje matematike. Upravo suprotno, igra može biti izuzetno snažan alat za učenje osnovnih matematičkih pojmova i razvoj matematičkog razmišljanja kod djece. Kroz aktivnosti poput igre uz pokret, glazbe, pjesme, brojalica te igara s prstićima, djeca ne samo da uživaju, već i intuitivno upijaju matematičke koncepte (Klarin, 2015).

Prve interakcije djeteta s matematikom često se događaju kroz igru. Kroz brojalice poput "Jedan, dva, tri, tata s četiri oka" ili "Kad padne kiša, brojimo kapljice", djeca ne samo da usvajaju osnovne brojeve i redoslijed, već i razvijaju koncept brojanja, povezujući brojčane simbole s konkretnim objektima i situacijama. Igre poput sakrivanja, gdje djeca trebaju brojati do deset dok drugo dijete traži skrivenog igrača, razvijaju razumijevanje apstraktnih brojeva i njihovu primjenu u stvarnom svijetu (Vlahović Vizek Vidović Sudžuka, 1998).

Plesne igre s brojevima ili geometrijskim oblicima potiču razumijevanje prostornih odnosa i oblika. Kroz kretanje i manipulaciju tijelom, djeca intuitivno usvajaju pojmove poput "iznad", "ispod", "lijevo", "desno", kao i različite geometrijske oblike poput kruga, kvadrata i trokuta (Kadum, Kadum 2019).

Glazba također igra važnu ulogu u učenju matematike kroz igru. Ritmičke igre potiču razumijevanje ritma, ponavljanja i uzoraka, što su temeljni koncepti u matematici. Pjevanje pjesmica koje sadrže matematičke elemente, poput "Ako ti je dosadno, reci dva puta dva je četiri", potiče brzinu razmišljanja i pomaže u memoriranju matematičkih činjenica.

Osim toga, igra s prstićima kao što su brojanje prstiju ili igre poput "Koja ruka ima više prstiju" potiču razvoj koncepta količine, uspoređivanja i razlikovanja. Djeca kroz ove aktivnosti razvijaju osjećaj za količinu i razumijevaju koncepte poput "više" i "manje", što su

ključne vještine u matematičkom razmišljanju (Samuelsson, Johansson, 2006). Uključivanje matematike u igru, kako direktno tako i indirektno, već u najranijoj dobi kod djece razvija matematičko-logički pristup svijetu koji ih okružuje. Odgajatelji imaju ključnu ulogu u poticanju ovog razvoja, budući da su oni ti koji kreiraju okruženje u kojem se djeca igraju i uče. Stvaranjem poticajnog okruženja koje obiluje matematičkim aktivnostima, odgajatelji mogu pomoći djeci u stvaranju čvrstih temelja za daljnji razvoj matematičkih sposobnosti.

4. ALGEBRU U RANIM GODINAMA

Algebra predstavlja fundamentalnu granu matematike koja se bavi generalizacijom aritmetičkih ideja, omogućujući rješavanje problema pomoću nepoznatih vrijednosti i

varijabli. Kao što je Soucie, 2013 naveo, algebra ima dualnu ulogu u obrazovnom sustavu: ona može služiti kao vrata prema visokom obrazovanju ili kao barijera koja sprječava daljnji akademski napredak. Zbog svoje važnosti, matematički edukatori i donositelji politika proglasili su inicijativu „algebra za sve“ kao ključni korak ka osiguravanju jednakih obrazovnih mogućnosti (Montague Smith, Cotton, et.all. 2018). Međutim, iako je poticanje djece da uzmu algebru važan korak, problem leži u njihovoj pripremljenosti. Kako bi djeca bili uspješni u algebri, neophodno je započeti s pripremama već u ranim godinama.

Matematička pismenost postaje sve važnija u današnjem svijetu koji se brzo mijenja. Algebra, kao temeljni dio matematike, ima ključnu ulogu u razvoju logičkog mišljenja i rješavanju problema. Djeca koja razvijaju te vještine od rane dobi bolje su pripremljena za složenije matematičke koncepte i zadatke kasnije u obrazovanju. Aktivnosti koje podupiru algebarsko razmišljanje u ranim godinama obrađuju se u zajedničkoj izjavi koju su izdali Nacionalna udruga za obrazovanje male djece (NAEYC) i Nacionalno vijeće nastavnika matematike (NCTM).

Ovo stajalište poziva na promicanje „dobrih početaka“ uz kvalitetno, izazovno i dostupno matematičko obrazovanje (Peteh, 2008). Ove organizacije naglašavaju da rano izlaganje kvalitetnoj matematici, uključujući algebru, postavlja čvrste temelje za buduće učenje matematike. Jedan od načina uvođenja algebarskog mišljenja su aktivnosti koje su vezane uz svakodnevni život djece. Na primjer, možemo koristiti igre i igračke za predstavljanje jednostavnih uzoraka i odnosa. Djeca mogu naučiti prepoznavati i stvarati uzorke, što je osnovni korak prema razumijevanju algebarskih konceptata.

Također, korištenje priča i problema iz stvarnog svijeta može pomoći djeci da vide primjenu matematike u svakodnevnom životu. Primjerice, kroz priču o trgovini u kojoj djeca moraju izračunati cijenu nekoliko artikala ili podijeliti broj igračaka prijateljima, djeca uče osnovne računske operacije i razvijaju osjećaj za brojeve i odnose. Rano učenje algebarskih konceptata ne samo da poboljšava matematičku pismenost, već i razvija kritičko mišljenje, analitičke vještine i sposobnosti rješavanja problema. Djeca koja su u ranoj dobi izložena algebarskim konceptima često pokazuju veće povjerenje u matematici i postižu bolje rezultate na školskim testovima (Slunjski, 2012). Matematička pismenost postaje sve važnija u današnjem svijetu koji se brzo mijenja. Algebra, kao temeljni dio matematike, ima ključnu ulogu u razvoju logičkog mišljenja i rješavanju problema. Djeca koja razvijaju te vještine od rane dobi bolje su pripremljena za složenije matematičke koncepte i zadatke kasnije u obrazovanju. Jedan od načina za uvođenje algebarskog razmišljanja je kroz aktivnosti koje su povezane sa

svakodnevnim životom djece. Na primjer, možemo koristiti igre i igračke za predstavljanje jednostavnih uzoraka i odnosa. Djeca mogu učiti prepoznavanje i stvaranje uzoraka, što je osnovni korak ka razumijevanju algebarskih pojmova (Liebeck, 1995).

Također, korištenje priča i problema iz stvarnog svijeta može pomoći djeci da vide primjenu matematike u svakodnevnom životu. Na primjer, kroz priču o trgovini gdje djeca trebaju izračunati cijenu nekoliko artikala ili podijeliti broj igračaka među prijateljima, djeca uče osnovne aritmetičke operacije i razvijaju osjećaj za brojeve i odnose. Rano učenje algebarskih koncepata ne samo da poboljšava matematičku pismenost, već i razvija kritičko razmišljanje, analitičke vještine i sposobnost rješavanja problema.

Nadalje, kontinuirana podrška i profesionalni razvoj odgajatelja su ključni za uspjeh ove inicijative. Odgajatelji trebaju biti opremljeni znanjem i alatima koji će im omogućiti da učinkovito prenesu algebarske koncepte na djecu. To uključuje ne samo tradicionalne metode podučavanja, već i korištenje tehnologije i inovativnih pristupa koji mogu učiniti učenje algebre zanimljivijim i pristupačnijim.

Bitno je napomenuti da prepreke u učenju algebre često nisu samo akademske prirode. Socijalni i ekonomski čimbenici također igraju značajnu ulogu. Djeca iz siromašnijih zajednica često nemaju pristup kvalitetnim obrazovnim resursima, što ih stavlja u nepovoljan položaj. Stoga, inicijativa „algebra za sve“ mora biti podržana širim društvenim naporima koji će osigurati ravnopravnost u pristupu obrazovanju.

4.1. Primjena koncepta algebre u ranim i predškolskim ustanovama

Algebra je ključna grana matematike koja igra vitalnu ulogu u razvoju logičkog razmišljanja i rješavanja problema kod djece. Kada razmatramo rane iskustva koja su potrebna za uspjeh u učenju formalne algebre, pronalazimo nekoliko međusobno povezanih koncepata koji su razvojno prikladni i vrlo primjenjivi u ranom djetinjstvu. Središnje ideje koje promiče nacionalni standard za algebru za malu djecu su: uzorci, matematičke situacije i strukture, modeli kvantitativnih odnosa i promjene (Vlahović Kovačić, 1999). Sve ove glavne koncepte „povećavaju prirodni interes djece za matematiku i njihovu sklonost da je koriste kako bi razumjeli svoj fizički i društveni svijet“ (Marendić, 2009). Jasno je da ove „velike ideje“ trebaju biti međusobno povezane i temeljni aspekti programa matematike u ranom djetinjstvu. Jedan od prvih koraka u razumijevanju algebre je prepoznavanje i stvaranje

uzoraka. Djeca već u ranom uzrastu pokazuju sposobnost prepoznavanja uzoraka, bilo da se radi o vizualnim, slušnim ili taktilnim uzorcima.

Prepoznavanje uzoraka pomaže djeci da predviđaju što će se dogoditi sljedeće, što je osnovni aspekt algebraičkog razmišljanja. Na primjer, djeca mogu koristiti boje, oblike ili brojeve za stvaranje nizova koji slijede određeni redoslijed. Ova aktivnost ne samo da razvija njihovu sposobnost uočavanja pravilnosti već ih uvodi i u koncept funkcije, koji je temeljni za razumijevanje složenijih algebraičkih struktura (Čudina-Obradović, 2008). Matematičke situacije i strukture uključuju razumijevanje i manipulaciju osnovnim matematičkim konceptima kroz svakodnevne aktivnosti.

Djeca se mogu susretati s matematičkim situacijama kroz igre, slagalice, i jednostavne zadatke koji uključuju brojanje, uspoređivanje i razvrstavanje. Ove aktivnosti omogućuju djeci da izgrade osnovno razumijevanje matematičkih operacija i odnosa, što je ključno za kasnije učenje algebre. Na primjer, slaganje kockica različitih boja i veličina može pomoći djeci da razumiju koncept klasifikacije i serijacije, koji su važni za razvoj logičkog mišljenja (Wood, 1995). Razumijevanje kvantitativnih odnosa je ključno za algebru, a djeca to mogu naučiti kroz igre i aktivnosti koje uključuju mjerenje, uspoređivanje i procjenjivanje.

Na primjer, mjerenje dužine, težine ili volumena različitih objekata pomaže djeci da shvate odnose među brojevima i veličinama. Ove aktivnosti razvijaju njihovu sposobnost da koriste matematičke modele za prikazivanje i rješavanje problema iz stvarnog života. Osim toga, kroz interakciju s ovim konceptima, djeca uče kako koristiti simbolički jezik za predstavljanje kvantitativnih odnosa, što je ključno za algebarsko razmišljanje. Koncept promjene je također ključan u ranom učenju algebre.

Djeca trebaju razumjeti kako se objekti i brojevi mijenjaju kroz različite operacije i transformacije. Aktivnosti koje uključuju dodavanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje pomažu djeci da shvate kako se vrijednosti mijenjaju i kako te promjene mogu biti predstavljene matematički. Na primjer, jednostavne igre koje uključuju dodavanje ili oduzimanje predmeta iz grupe mogu pomoći djeci da vizualiziraju i razumiju osnovne aritmetičke operacije i njihove učinke.

4.2. Uzorci kao temelj algebraičkog razmišljanja

Uzorci su neizostavan dio algebraičkog razmišljanja i igraju ključnu ulogu u ranom obrazovanju djece. Djeca od malih nogu dolaze u kontakt s raznim oblicima uzoraka u svakodnevnom životu. Promatrajući prirodne fenomene poput zalaska sunca, slušajući pjesme i priče koje imaju određeni ritam, ili čak prateći ponašanje kućnih ljubimaca, djeca uče prepoznavati i razumjeti uzorke. Na taj način, uzorci postaju sredstvo kroz koje djeca počinju shvaćati svijet oko sebe.

Kao što Wood, 1995 primjećuje, djeca uživaju u aktivnostima koje uključuju uzorke. Skakanje konopca uz ritmičke pjesme ili hodanje po pločniku složenom u uzorcima, prirodni su načini na koje djeca dolaze u dodir s konceptom uzoraka. Ove aktivnosti ne samo da su zabavne, već i igraju važnu ulogu u kognitivnom razvoju djece, pomažući im da razviju vještine prepoznavanja i generalizacije uzoraka.

Nacionalno vijeće učitelja matematike naglašava važnost prepoznavanja, opisivanja, proširivanja i prevođenja uzoraka u razvoju algebraičkog mišljenja. Rad s uzorcima pomaže djeci da identificiraju odnose među objektima i događajima te da formiraju generalizacije koje su temelj za rješavanje algebraičkih problema. Kroz rad s uzorcima, djeca uče kako strukturirati svoje razmišljanje i pristupiti problemima na sistematičan način.

Kada govorimo o uzorcima, mnogi od nas prvo pomisle na ponavljajuće serije. Primjerice, izmjenjivanje dana i noći ("dan, noć, dan, noć") je jednostavan ali učinkovit primjer ponavljajućeg uzorka. Ovi uzorci sadrže segmente koji se kontinuirano ponavljaju, a segmenti mogu varirati u svojoj veličini i složenosti. Najjednostavniji ponavljajući uzorci sastoje se od samo dva elementa, ali kako djeca rastu, tako se povećava i složenost uzoraka s kojima se susreću (Montague Smith, Cotton, et.all. 2018).

Učenje kroz uzorke omogućava djeci da razumiju i primijene koncept ponavljanja i predvidljivosti. Ovi su koncepti ključni za kasnije razumijevanje složenijih matematičkih i algebraičkih ideja. Na primjer, prepoznavanje uzoraka u brojevnim nizovima ili geometrijskim oblicima pomaže djeci da razviju sposobnost generalizacije, što je temeljno za rješavanje matematičkih problema. Izgradnja temelja za algebru kod male djece može se započeti kroz svakodnevna iskustva s uzorcima. Ova iskustva mogu biti vrlo jednostavna, ali izuzetno korisna za razvoj matematičkih vještina koje će djeca kasnije koristiti. Na primjer, odgajatelj/ca može pokazati dvogodišnjacima jednostavan uzorak pokreta i ritma, kao što je "pljesni, tapkaj, pljesni, tapkaj, pljesni, tapkaj...". Djeca su pozvana da se pridruže čim budu

sprema. Za malu djecu, jednostavni uzorci koji uključuju pokret i ritam su vrlo korisni jer im pomažu razviti osjećaj za redoslijed i ponavljanje.

U predškolskoj, dijete postavlja kocke u jednostavan uzorak. Očigledno, zna nešto o ponavljajućim uzorcima. Kad ga odgajatelj pita da "pročita" uzorak, dijete uzbuđeno objašnjava, "Pa, to je plava, crvena, plava, crvena, plava, crvena, plava, crvena...". Odgajatelj ga potiče da pokaže na svaku kocku dok "čita" uzorak (Hännikäinen, Munter, 2018). Ovaj pristup pomaže djeci da koriste mnoge osjete; pokazivanjem na kocke, gledanjem, izgovaranjem i slušanjem boja u uzorku.

Kako bi pomogla djetetu da pređe na sljedeću razinu, odgajatelj/ica postavlja seriju od tri obojene kocke u ponavljajućem formatu (zelena, žuta, plava, zelena, žuta, plava, zelena, žuta, plava...). Pita ga, "Što dolazi sljedeće?" Kad dijete kaže da nije siguran, odgajatelj/ica ga pita da pročita uzorak. Na taj način, dijete koristi mnoge osjete; pokazuje na kocke, gleda ih, izgovara i čuje boje u uzorku. Dijete brzo shvati da je sljedeća zelena kocka u uzorku. Kad ga odgajatelj/ica pita da objasni zašto je to uzorak, odgovara, "Znaš da je to uzorak jer se ponavlja opet i opet!" (Moses, 2001).

Razvoj sposobnosti prepoznavanja i stvaranja uzoraka ključan je korak u obrazovanju djece, jer te vještine ne samo da potiču matematičke kompetencije, već i kritičko razmišljanje i sposobnost rješavanja problema. Odgajatelj/ica kao primjer, pomaže djetetu asimilirati informacije kroz osjetila, omogućujući mu da uspješno savlada složeniji uzorak.

Kroz takav pristup, dijete se suočava s izazovima koji su primjereni njegovom razvojnom stadiju, a istovremeno se nalazi u ugodnom i podržavajućem okruženju. Nakon nekoliko sličnih iskustava, dijete će biti spreman za rješavanje još složenijih uzoraka. Ovakav pristup pokazuje važnost postupnog povećanja složenosti zadataka u skladu s djetetovim napretkom (Samuelsson, Johansson, 2006). Jedan od načina za povećanje složenosti uzoraka je korištenje različitih atributa osim boje.

Primjerice, počevši s jednostavnim nizom od dva elementa, odgajatelj može potaknuti djecu da se usredotoče na oblik i veličinu kao ponavljajuće atribute. Uzorci poput "trokut, krug, trokut, krug, trokut..." ili "velik, mali, velik, mali, velik, mali..." omogućuju djeci da nastave ponavljati uzorke koristeći složenije atribute. Važno je ukloniti boju kao atribut pri radu na uzorcima oblika ili veličine, jer se djeca mogu fokusirati isključivo na boju umjesto na oblik ili veličinu (Slunjski, 2006). Na primjer, uzorak "heksagon, trapez, heksagon, trapez..." može

izgledati kao uzorak oblika, ali ako su svi heksagoni žuti, a svi trapezi crveni, dijete će se možda fokusirati samo na boju.

Kako bi se osiguralo da djeca razumiju pravi atribut uzorka, odgajatelji mogu koristiti oblike iste boje (npr. plavi heksagoni i plavi trapezi) ili povećati složenost dodavanjem različitih boja (npr. plavi heksagon, zeleni trapez, crveni heksagon, zeleni trapez, žuti heksagon, crveni trapez). Na taj način, djeca će biti prisiljena obratiti pažnju na oblike i veličine, a ne samo na boje (Moses, 2001). Kroz pažljivo planirane aktivnosti, djeca mogu razviti sposobnost prepoznavanja i stvaranja složenih uzoraka. Postupno povećanje složenosti uzoraka omogućava djeci da se osjećaju sigurnima u svoje sposobnosti, istovremeno ih izazivajući da razmišljaju kritički i kreativno.

Ovaj proces također jača njihove matematičke vještine i priprema ih za složenije zadatke u budućnosti. Jedan od ključnih ciljeva ranog obrazovanja je razvijanje sposobnosti rješavanja problema i kritičkog razmišljanja kod djece. Jedan od načina kako se to može postići je kroz aktivnosti koje ih potiču da prepoznaju i koriste različite attribute za stvaranje obrazaca. Iako su oblik, veličina i boja najčešće korišteni atributi, važno je da djeca nauče prepoznati i koristiti i druge, manje očite.

Većina djece u ranom obrazovanju susreće se s osnovnim obrascima koji uključuju boje, oblike i veličinu. Na primjer, crveni krug, plavi kvadrat, crveni krug, plavi kvadrat. Međutim, kako bi se potaknulo dublje razumijevanje i kreativnost, potrebno je uvesti i druge vrste atributa. Jednostavni prostorni obrasci poput "gore, dolje, gore, dolje" ili "vrh, strana, prednja strana, vrh, strana, prednja strana" omogućuju djeci da koriste prostorne orijentacije kao ponavljajuće značajke (Lott, et.all. 2000). Ovi obrasci ne samo da djeci pružaju priliku vježbati svoje vještine prepoznavanja obrazaca, već ih također potiču razmišljati na različite načine.

Praktično bilo koja kategorija sortiranja može se koristiti kao ponavljajući atribut. Na primjer, broj rupa u gumbima, tekstura školjke, pa čak i karakteristike poput "ima krila" ili "nema krila". Ovo je ilustrirano u primjeru s predškolcem koji je stvorio ponavljajući obrazac koristeći plastične kukce iz znanstvenog centra. Kad je predškolarac pročitao svoj obrazac pred razredom, ponosno je uzviknuo: "Krila, bez krila, krila, bez krila, krila, bez krila." Ovaj primjer pokazuje kako djeca mogu koristiti izolirane attribute za stvaranje složenih obrazaca, dok istovremeno negiraju nekoliko. Tu se pokazuje sposobnost da prepozna i primijeni ovaj obrazac pokazuje višu razinu razmišljanja. On ne samo da je prepoznao ponavljajući atribut,

već je također pokazao sposobnost da ignorira druge atribute koji nisu relevantni za obrazac koji je stvorio. Ovo je primjer algebarskog razmišljanja koje je ključno za kasniji uspjeh u matematici i drugim znanstvenim područjima (Hännikäinen, Munter, 2018). Poticanje djece da koriste različite atribute za stvaranje obrazaca ima brojne prednosti.

Prvo, razvija njihovu sposobnost prepoznavanja obrazaca i kategorizacije, što su ključne vještine u matematici. Drugo, potiče kreativnost i kritičko razmišljanje, jer djeca moraju pronaći nove načine za rješavanje problema i stvaranje obrazaca. Treće, omogućuje im da istraže svijet oko sebe na dublji način, jer moraju obratiti pažnju na detalje koje možda nisu odmah očitati. Ova pažnja na detalje potiče njihovu sposobnost promatranja i analize, što je ključno za razumijevanje složenosti okoline i stvaranje dubljih veza između različitih informacija.

Četvrto, razumijevanje ponavljajućih uzoraka omogućuje djeci da prepoznaju redoslijed i ritam u nizu podataka. Učenje prepoznavanja uzoraka omogućuje djeci da razviju osjećaj za predvidljivost i redoslijed, što je ključno za razumijevanje matematičkih koncepata kao što su aritmetika i geometrija. Kroz prepoznavanje uzoraka, djeca stječu temeljne vještine u analizi i sintezi informacija, što im pomaže u rješavanju problema u matematici i drugim područjima. Peto, rad s rastućim uzorcima omogućuje djeci da razviju razumijevanje promjene i povećanja.

Kroz proučavanje uzoraka koji se povećavaju ili smanjuju po konstantnom iznosu, djeca razvijaju osjećaj za postupno mijenjanje i razumijevanje matematičkih operacija poput dodavanja i oduzimanja. Na primjer, rastući uzorak "1, 2, 3, 4, 5, 6..." omogućuje djeci da vide kako se svaki sljedeći broj povećava za jedan u odnosu na prethodni, što im pomaže u razumijevanju koncepta inkrementacije (Marendić, 2009). Šesto, rad s uzorcima pruža djeci vizualne i taktičke podražaje koji potiču njihovu kreativnost i angažman.

Korištenje manipulativnih materijala poput kockica za povezivanje omogućuje djeci da stvore i istraže uzorke na interaktivan način. Kroz ovakav pristup, djeca ne samo da razvijaju svoje matematičke vještine, već i svoje motoričke sposobnosti i kreativnost. Konačno, rad s uzorcima pruža priliku za integraciju matematike s drugim područjima učenja, poput jezika, umjetnosti i prirodnih znanosti. Primjerice, prepoznavanje uzoraka u narativima ili umjetničkim djelima može potaknuti dječju sposobnost apstraktnog razmišljanja i povezivanja različitih koncepata (Copley, 2000). Kroz primjere kao što su igre, vizualne ilustracije i interaktivne aktivnosti, djeca mogu otkriti čudesni svijet rastućih obrazaca. Umjesto

suhoparnog nabiranja brojeva, djeca mogu istraživati oblike, uzorke i odnose između elemenata u nizu. Primjerice, jednostavan niz brojeva može se prikazati kao "stepenice do divove kuće", kako su to opazili (Peteh, 2008) u jednoj predškolskoj ustanovi. Ovaj kreativni pristup omogućava djeci da razviju intuitivno razumijevanje matematičkih koncepata, što često rezultira dubljim i trajnijim učenjem.

Ključna vještina koju djeca razvijaju kroz istraživanje rastućih obrazaca je algebarsko razmišljanje. Kroz prepoznavanje uzoraka i generalizaciju pravila, djeca počinju razvijati osjećaj za apstraktno razmišljanje, što je temelj za napredovanje u matematici. Kada odgajatelj/ca prepozna da se svaki sljedeći blok u nizu povećava za 3, ona zapravo primjenjuje algebarski koncept inkrementa (Montague Smith, Cotton, et.all. 2018). Ovo je ključni korak u razvoju algebarskog razmišljanja koje će djeci biti od koristi u složenijim matematičkim područjima u budućnosti.

Treba napomenuti da učenje rastućih obrazaca ne samo da razvija matematičke vještine, već i potiče kreativnost i istraživački duh kod djece. Kroz konstrukciju vlastitih rastućih obrazaca u matematičkim dnevnicima, djeca preuzimaju ulogu istraživača i kreatora, što ih potiče da aktivno sudjeluju u procesu učenja. Kroz ovu aktivnost, djeca ne samo da primjenjuju stečena znanja, već i razvijaju vlastitu matematičku intuiciju i samopouzdanje (Došen-Dobud, 1995).

Odgajatelji imaju ključnu ulogu u poticanju istraživačkog učenja rastućih obrazaca. Postavljanjem poticajnih pitanja, pružanjem raznolikih materijala i poticanjem suradnje među djecom, odgajatelj stvaraju poticajno okruženje u kojem djeca mogu razvijati svoje matematičke sposobnosti. Također je važno naglasiti kontinuiranu podršku i ohrabrivanje kako bi se potaknula ustrajnost i samopouzdanje kod djece, posebno kada se suoče s izazovima u rješavanju složenijih problema.

Odgajatelji se trude pronaći kreativne načine kako bi djecu potaknuli da promatraju, identificiraju i analiziraju uzorke u svijetu oko sebe. Uzorci su svuda oko nas, od matematičkih sekvenci do prirodnih fenomena, umjetnosti i dizajna. Učenje o uzorcima ne samo da potiče apstraktno razmišljanje, već i pruža osnove za razumijevanje složenijih matematičkih koncepata poput algebre i geometrije (Soucie, 2013). U svom radu, odgajatelji se često susreću s različitim razinama razumijevanja i spremnosti među djecom. Stoga je važno prilagoditi sadržaj tako da odgovara potrebama i sposobnostima svakog pojedinog djeteta. Različita djeca pokazuju različite razine spremnosti za razumijevanje uzoraka. Primjerice, djeca, mogu biti spremni za istraživanje uzoraka koji se povećavaju ili smanjuju

za više od jednog, dok drugi, možda već imaju razumijevanje ponavljajućih funkcija i složenijih uzoraka. Važno je pružiti izazove koji odgovaraju svakom djetetu kako bi se osiguralo da svatko ima priliku napredovati i razvijati svoje matematičke vještine (Moses, 2001).

Odgajatelji također moraju imati na umu da uzorci nisu uvijek linearni. Dok su linearni uzorci često jasno vidljivi i lako se prepoznaju, nelinearni uzorci mogu biti složeniji i zahtijevaju dublje promatranje i analizu. Koncentrični uzorci, poput onih u Nautilusovoj školjci, pružaju izvrstan primjer nelinearnog uzorka u prirodi (Slunjski, 2012). Osim toga, nelinearni uzorci mogu se naći i u umjetnosti, dizajnu tkanina te u arhitekturi i urbanom okruženju.

4.3. Matematičke situacije i strukture

Algebarsko mišljenje nije samo sposobnost rješavanja složenih jednadžbi, već je to i način razmišljanja o odnosima i uzorcima između matematičkih objekata. Kroz interakciju s različitim matematičkim situacijama, djeca postupno razvijaju razumijevanje osnovnih algebarskih koncepata. Jedan od tih ključnih koncepata je jednakost. Jednakost je temeljni koncept koji djeci omogućuje da razumiju da dvije strane jednakosti imaju istu vrijednost. Kroz manipulaciju s različitim materijalima i alatima, poput pan balansnih vaga, djeca mogu vizualno i taktički doživjeti jednakost. Na primjer, postavljanje iste količine blokova na obje strane vage jasno pokazuje da su njihove težine jednake (Hännikäinen, Munter, 2018).

Pan balansne vage su izvrstan alat za predstavljanje i analizu matematičkih situacija jer omogućuju djeci da eksperimentiraju s različitim kombinacijama objekata i istražuju kako težina jedne strane utječe na drugu. Kroz ove aktivnosti, djeca mogu intuitivno shvatiti koncepte poput komutativnosti i asocijativnosti. Da bismo izgradili koncepte komutativnosti, asocijativnosti i ekvivalentnih oblika, ključno je pružiti djeci raznolika iskustva s matematičkim situacijama i strukturama kroz reprezentacije i analize jednakosti.

Komutativnost kroz konkretne primjere poput voća ili igračaka, djeca mogu iskusiti komutativnost u zbrajanju. Na primjer, ako imamo dva jabuka i tri banane, redoslijed zbrajanja ne mijenja konačnu količinu voća. Ovo se može vizualizirati kroz manipulaciju stvarnim predmetima ili korištenjem ilustracija. Upotreba pan balansnih vaga može također demonstrirati komutativnost. Stavljanjem predmeta na obje strane vage i promjenom njihovog

rasporeda, djeca mogu vidjeti da se ravnoteža ne mijenja, što ilustrira da redoslijed zbrajanja ne utječe na konačni rezultat (Marendić, 2009). Asocijativnost djeca mogu istražiti asocijativnost kroz grupiranje predmeta na različite načine. Na primjer, ako imamo tri različita tipa voća (jabuke, banane i naranče), možemo ih grupirati na različite načine prije zbrajanja. Grupiranje može biti vizualno predstavljeno kroz korištenje različitih boja ili oblika. Kroz aktivnosti poput slagalica ili građenja tornjeva od kockica, djeca mogu istražiti kako se grupiranje elemenata može promijeniti, ali konačni rezultat ostaje isti (Vlahović, 2009).

To ih vodi do razumijevanja da se redoslijed zbrajanja može mijenjati, ali rezultat ostaje konstantan. Ekvivalentni oblici kroz manipulaciju s različitim oblicima i veličinama, djeca mogu istražiti ekvivalentne oblike. Na primjer, ako imamo dva manja pravokutnika i jedan veći pravokutnik, djeca mogu vidjeti da su ukupne površine jednake. Korištenje mjerila, poput linijala ili vage, može također pomoći djeci da istraže ekvivalentne oblike. Na primjer, možemo usporediti duljine različitih predmeta ili težinu različitih skupova predmeta kako bismo otkrili ekvivalentnosti (Samuelsson, Johansson, 2006).

Kroz ova iskustva i aktivnosti, djeca postupno razvijaju intuitivno razumijevanje koncepta komutativnosti, asocijativnosti i ekvivalentnih oblika, što im omogućuje da kasnije rade s ovim svojstvima u formalnijem matematičkom kontekstu. Na primjer, ako stavimo dva bloka na jednu stranu vage i tri bloka na drugu stranu, djeca će primijetiti da se vaganje ne mijenja ako premjestimo blok s jedne strane na drugu, što pokazuje komutativnost u dodavanju. Također, ako dodamo još jedan blok na svaku stranu, i dalje će ostati u ravnoteži, ilustrirajući asocijativnost zbrajanja.

Osim toga, pan balansne vage omogućuju djeci da istraže ekvivalentne oblike. Na primjer, ako stavimo pet manjih blokova na jednu stranu i zamijenimo ih s tri veća bloka na drugoj strani, djeca će vidjeti da obje strane i dalje imaju istu težinu, što ih vodi do razumijevanja ekvivalentnih oblika. Uz pomoć ovih iskustava, djeca postupno razvijaju sposobnost rješavanja matematičkih problema i manipuliranja s nepoznatim varijablama. Kroz aktivno sudjelovanje u matematičkim situacijama i strukturama, mala djeca stječu čvrste temelje za daljnje algebarsko mišljenje i uspješno napredovanje u matematičkom obrazovanju.



Slika 2 Pan balansne vage

Izvor; https://resourcebinderecse.weebly.com/uploads/2/0/1/3/20133951/algebra_in_the_ec_years.pdf
(1.6.2024.)

Kroz ovaj dijalog, djeca konstruiraju značenje povezano s pojmom algebarske jednakosti. Na primjer, kada dijete izražava da je "uravnoteženo kad je stvarno ravno", on implicira da se jednakost može povezati s vizualnom ravnotežom, gdje nema prekomjerne težine na jednoj strani. Ovo intuitivno razumijevanje odražava osnovni koncept jednakosti u algebri, gdje obje strane jednakosti imaju istu vrijednost (Slunjski, 2016). Kroz ovaj dijalog, djeca počinju razumjeti da algebarska jednakost zahtijeva da obje strane budu jednake i da ne može biti prekomjerne težine na jednoj strani. Ova autentična iskustva omogućuju djeci da vizualiziraju i razumiju apstraktne matematičke koncepte poput jednakosti kroz konkretna iskustva s vagom i svakodnevnim predmetima. Kroz interaktivni dijalog, djeca konstruiraju svoje razumijevanje i povezuju ga s njihovim iskustvima, što im omogućuje da dublje razumiju algebarsku jednakost i njezinu primjenu u stvarnom svijetu. Uz kontinuirano poticanje takvih interakcija i iskustava, djeca postupno razvijaju temelje za daljnje istraživanje i primjenu algebarskih koncepata u matematičkim situacijama.

4.4. Modeli kvantitativnih odnosa

U modelima kvantitativnih odnosa, naglasak se stavlja na praktične pristupe koji služe izgradnji svijesti i razumijevanja vrijednosti. Postavljanjem pitanja poput "Koliko očiju je u skupini od četiri osobe?" otvara se prostor za promatranje različitih pristupa u rješavanju problema, posebno kada se radi s djecom. Kroz ovaj proces, svjedočimo raznolikim

metodama i strategijama koje djeca koriste kako bi razumjela kvantitativne odnose (Bognar, 200).

Primjerice, neka djeca se mogu okupiti u grupu od četvero i jednostavno brojiti oči kako bi došli do rješenja. Ovo je direktni pristup koji koristi osnovnu matematičku operaciju zbrajanja. S druge strane, neki će možda preferirati crtati slike ljudi s očima, što je vizualni pristup koji može pomoći u stvaranju mentalnih slika i povezivanju broja s konkretnim predmetima. Alternativno, djeca mogu koristiti materijale poput četiri papirnata tanjura, svaki s dva brojača, kako bi ilustrirali broj očiju.

Ovo je praktičan pristup koji uključuje manipulaciju materijalima kako bi se demonstrirao koncept brojanja. Također, neka djeca mogu izraziti rješenje kroz matematički izraz poput $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, što pokazuje razumijevanje osnovnih aritmetičkih operacija (Montague Smith, Cotton, et.all. 2018). Kroz postavljanje dodatnih pitanja poput "Kako znate da postoje osam očiju?" ili "Na koje druge načine možete pokazati ovu situaciju?" potičemo djecu na dublje razmišljanje i refleksiju. Ova pitanja otvaraju vrata za dijalog i potiču ih da razmišljaju o različitim aspektima problema, kao i o alternativnim rješenjima.

Nadalje, postavljanjem pitanja poput "Što ako je bilo samo troje ljudi?" potiče se djecu na razmatranje različitih scenarija i mogućnosti. Ovo ih potiče da razmišljaju o varijacijama u problemu i razumiju kako kvantitativni odnosi mogu varirati ovisno o kontekstu. Kroz ovaj proces, edukatori igraju ključnu ulogu u poticanju dječjeg razmišljanja i razvoju njihovih vještina u području matematike i kvantitativnog razumijevanja. Postavljanjem pitanja, potičemo ih da istraže, promišljaju i konstruiraju vlastito razumijevanje, stvarajući čvrste temelje za daljnje učenje i razvoj.

U primjeru Lott, et.all. 2000, vidimo kako odgajatelj koristi modeliranje kvantitativnih odnosa tijekom vremena za užinu kako bi potaknuo dijete da razmišljaju o matematičkim konceptima. Odgajatelj poziva četvero djece da odaberu tri zalogaja s tanjura koji sadrže krekeri i perez te potiče raspravu o njihovim izborima. Uloga odgajatelja u ovom scenariju nije samo usmjerena na predavanje, već i na poticanje dijaloga među djecom. Kroz postavljanje pitanja poput "Imaju li isti iznos?" odgajatelj potiče da djecu verbaliziraju i argumentiraju svoja razmišljanja, čime se potiče kritičko razmišljanje i komunikacijske vještine.

Osim toga, kroz razmjenu mišljenja i ideja, djeca također uče razumijevati različite perspektive i pristupe rješavanju problema. Učenje putem modeliranja kvantitativnih odnosa u stvarnom kontekstu također omogućuje djeci da razvijaju svoje matematičke sposobnosti na

način koji je relevantan i primjenjiv u svakodnevnom životu. Kroz aktivnosti ove, djeca stječu vještine koje im mogu biti korisne ne samo u matematičkim situacijama, već i u širem spektru situacija koje zahtijevaju analitičko razmišljanje.

Korištenje modela za predstavljanje i poučavanje kvantitativnih odnosa u vrtiću donosi brojne koristi za djecu. Osim što omogućuje konkretno vizualiziranje apstraktnih matematičkih koncepata, ova praksa također potiče aktivno sudjelovanje djece, potiče kritičko razmišljanje i komunikacijske vještine te ih priprema za primjenu stečenih znanja u stvarnom životu. Stoga je važno da odgajatelj prepoznaju vrijednost ovog pristupa i uključe ga u svoje planove kako bi osigurali najbolje iskustvo učenja.

4.5. Promjene koncepta u matematici

Promjena je osnovni koncept u matematici i životu općenito. Kroz promjene, razumijemo prirodu svijeta oko nas i postavljamo temelje za primjenu matematike u različitim kontekstima. Kada promjene prepoznamo i opisujemo, razvijamo algebarsko razmišljanje koje je ključno za razumijevanje složenih sustava i procesa. Prema matematičkim standardima, postoje dvije osnovne vrste promjena: kvalitativne i kvantitativne. Kvalitativne promjene odnose se na svojstva ili karakteristike koje se mijenjaju tijekom vremena, ali se opisuju relativnim pojmovima, poput veće, manje, više ili manje puno. Primjeri kvalitativnih promjena mogu uključivati rast djetetovih stopala u odnosu na par cipela ili visinu suncokreta tijekom vremena. Ove promjene su često lako uočljive i relativno predvidljive (Copley, 2000).

S druge strane, kvantitativne promjene odnose se na količinu ili mjere koje se mijenjaju tijekom vremena i opisuju se numeričkim vrijednostima. Na primjer, rast broja u cipeli koju nosi dijete, ili povećanje količine vode u kanti tijekom kišnog dana. Ove promjene često zahtijevaju precizno mjerenje i matematičko modeliranje kako bi se razumjele i predvidjele (Hännikäinen, Munter, 2018). Kroz ove vrste promjena, djeca uče kako promjene utječu na svijet oko njih te kako ih mogu opisati i razumjeti kroz matematičke koncepte.

Potičući ih da uoče i opisuju promjene, potičemo razvoj njihovog algebarskog razmišljanja, što im pomaže u razumijevanju složenih matematičkih koncepata u kasnijim fazama učenja. Bitno je da odgajatelji i roditelji pruže djeci prilike da istraže i eksperimentiraju s promjenama u različitim kontekstima, kako bi razvili svoje razumijevanje i vještine u rješavanju problema. Kroz aktivnosti poput mjerenja, grafiranja i analiziranja podataka, djeca mogu primijeniti

svoje znanje o promjenama i algebarskom razmišljanju na stvarne situacije, što ih priprema za uspješno rješavanje složenih matematičkih problema u budućnosti (Vlahović Kovačić, 1999).

Matematički jezik omogućuje precizno opisivanje promjena, što je ključno za razumijevanje svijeta oko nas. Kroz kvantitativne promjene, koje uključuju precizne numeričke vrijednosti, i kvalitativne promjene, koje se fokusiraju na suštinske karakteristike, djeca mogu razviti dublje razumijevanje svoje okoline. Igre su izvrstan način za djecu da eksperimentiraju s promjenama i steknu intuitivno razumijevanje matematičkih koncepata. Na primjer, dok pune vrećicu s blokovima, mala djeca primjećuju kako dodavanje svakog bloka povećava težinu vrećice. Ovo iskustvo pomaže im u razumijevanju osnovnih principa težine i masa (Liebeck, 1995).

Slično tome, korištenje kartonske rampe i teniske loptice omogućuje djeci da istraže kako promjena visine rampe utječe na udaljenost koju loptica prelazi. Ovo iskustvo pomaže im u razumijevanju koncepata kao što su kutovi i kinetička energija. Kroz igru s karikama lanca i težinama, djeca mogu istražiti kako duljina lanca utječe na broj njihanja njihala. Ovo ih potiče da razmišljaju o temama poput perioda oscilacije i zakona gravitacije (Vlahović Vizek Vidović Sudžuka, 1998).

Analizirajući ove promjene tijekom eksperimenata, djeca razvijaju svoje matematičke vještine i logičko razmišljanje. Osim toga, kroz igru, uče i važnost promatranja, postavljanja pitanja i razmjene ideja s drugima. Ukratko, igra je ključna za poticanje dječjeg razumijevanja matematike i promjena u svijetu oko njih. Kroz takva iskustva, djeca razvijaju temeljne matematičke koncepte i vještine koje će im biti korisne u budućnosti.

5.METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

U ovom radu napravljeno je istraživanje kako djeca u dobi od 3 do 6 godina usvajaju i razumiju algebarski koncept. Razvoj matematičkih vještina u ranom djetinjstvu ključan je za kasniji uspjeh u školovanju i životu. Među ovim vještinama, algebarski koncepti igraju značajnu ulogu jer djeci pomažu u razumijevanju uzoraka, odnosa i struktura koje su temelj matematičkog razmišljanja. Tradicionalno, algebru se često povezuje s višim razinama obrazovanja, ali istraživanja pokazuju da djeca u vrtiću također mogu razumjeti i koristiti osnovne algebarske koncepte kroz igru i svakodnevne aktivnosti.

Ciljevi istraživanja su: identificirati kako djeca u vrtiću razumiju i primjenjuju osnovne algebarske koncepte poput prepoznavanja uzoraka, razumijevanja sekvenci i jednostavnih aritmetičkih operacija. Ispitati utjecaj različitih didaktičkih materijala i metoda podučavanja na usvajanje algebarskih koncepata kod djece. Razviti preporuke za učinkovite pristupe podučavanju algebarskih koncepata u vrtiću.

OPIS EKSPERIMENTALNOG POSTUPKA

Ovo istraživanje provedeno je u neposrednom odgojno-obrazovnom radu u mješovitoj skupini DV Iskrice u Splitu. Djeca su promatrana i fotografirana tijekom slobodne igre i strukturiranih aktivnosti koje uključuju algebru (npr. brojanje igračaka na stolu, provlačenje konopa te ubacivanje čepova u kartone), kako bi kasnije detaljno analizirali njihove postupke i interakcije.

5.2. Uzorak ispitanika

Uzorak ispitanika predstavljaju 24 djece, mješovite skupine DV Iskrice u Splitu u dobi od 3-6 godina. Kronološka dob djece je u prosjeku 4,6 godina.

5.3. Mjerni instrumenti

Za prikupljanje podataka o razumijevanju i primjeni algebarskih koncepata kod djece u vrtiću korišteni su sljedeći mjerni instrumenti: Kontrolna lista za promatranje: Detaljan popis ponašanja i strategija koje istraživač prati tijekom aktivnosti. Ova lista uključuje stavke poput točnosti u izvršavanju zadataka, vrsta grešaka, strategija korištenih za brojanje ili prepoznavanje uzoraka, te trajanje aktivnosti. Bilješke promatrača: Slobodne bilješke

istraživača koje omogućuju bilježenje dodatnih zapažanja i kontekstualnih informacija koje nisu obuhvaćene kontrolnom listom.

5.4. Metoda obrade podataka

Rezultati istraživanja prikazani su u obliku tablica pri čemu je korištena deskriptivna statistika koja uključuje aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju, učestalosti te relativne vrijednosti istih.

5.5. Deskriptivna statistika

Opći opis uzorka

Uzorak se sastoji od 24 djece u dobi od 3 do 6 godina. Djeci su ponuđene 3 različite aktivnosti algebre.

Aktivnost 1: Prebrojavanje igraćaka na stolu (djeci je ponuđeno 10 različitih igraćaka i zadatak je da ih prebroje)

Aktivnost 2: Provlačenje konopa kroz numerirane tuljke(djeci je ponuđen konop koji je potrebno provući kroz deset numeriranih tuljaka)

Aktivnost 3: Ubacivanje zadanog broja čepova u kartone(zadatak je u svaki karton ubaciti točno određen broj čepova, maksimalni broj čepova je deset)

Tablica 1. Prikazuje demografske karakteristike uzorka i rezultati aktivnosti

Uzorak	Dob (godine)	Spol	Prebrojane igraćake na stolu	Točno provučeni tuljci	Ubačeni čepovi u kartonu
Dijete 1	4	Djevojčica	5	6	6
Dijete 2	4	Dječak	6	6	5
Dijete 3	4	Djevojčica	6	7	6
Dijete 4	5	Dječak	7	9	8
Dijete 5	4	Djevojčica	5	6	6
Dijete 6	4	Dječak	6	4	5
Dijete 7	6	Djevojčica	10	9	9
Dijete 8	5	Dječak	6	8	8
Dijete 9	4	Djevojčica	5	6	5
Dijete 10	5	Dječak	6	8	7
Dijete 11	6	Djevojčica	10	10	10
Dijete 12	4	Dječak	5	5	8
Dijete 13	5	Djevojčica	7	8	7

Dijete 14	4	Dječak	6	6	5
Dijete 15	6	Djevojčica	8	10	8
Dijete 16	5	Dječak	7	7	7
Dijete 17	4	Djevojčica	6	5	6
Dijete 18	6	Dječak	9	9	9
Dijete 19	6	Djevojčica	10	8	7
Dijete 20	5	Dječak	8	7	9
Dijete 21	4	Djevojčica	7	5	8
Dijete 22	4	Dječak	7	6	7
Dijete 23	6	Djevojčica	9	8	6
Dijete 24	4	Dječak	6	6	5

PRIKAZ REZULTATA

Rezultati pokazuju različitu razinu usvajanja i razumijevanja algebre kod djece ispitanika. U tablici 2. prikazan je postotak djece koja su usvojila ključne algebarske koncepte prema dobi.

Tablica 2. Postotak djece koja su usvojila koncepte algebre prema dobi

Dob (godine)	Prosječna točnost mjerenja			Prosječno odstupanje		
	Prebrojane igračke na stolu	Točno provučeni tuljci	Ubačeni čepovi u kartonu	Prebrojane igračke na stolu	Točno provučeni tuljci	Ubačeni čepovi u kartonu
4	5,8	5,6	4,4	42%	44%	56%
5	6,8	7,8	7,6	32%	22%	24%
6	9,3	9,0	8,1	7%	10%	19%

5.7. Analiza varijabilnosti

U sve tri aktivnosti starija djeca (5-6 godina) bila su uspješnija u izvršavanju zadataka u odnosu na mlađu djecu (4 godine). Ovo ukazuje na bolji razvoj numeričkih vještina s godinama. Djece koja su koristila strategiju kao što su: korištenje prstiju i verbalno ponavljanje brojeva imala su manje grešaka. Uobičajene greške kao što su preskakanje brojeva i dvostruko prebrojavanje ukazuju na potrebu za dodatnom podrškom i praksom u vještinama brojanja.

6. ZAKLJUČAK

Uloga odgajatelja u djetinjstvu je iznimno važna, posebno kada je riječ o poticanju dječjeg učenja kroz igru. Kroz igru, djeca ne samo da istražuju svoj svijet već i razvijaju brojne vještine i koncepte, uključujući i matematičke ideje. Kao što je naglašeno u zajedničkom položaju izjave Nacionalne udruge za rani odgoj djece (NAEYC) i Nacionalnog udruženja učitelja matematike (NCTM), odgajatelji imaju ključnu ulogu u osiguravanju dovoljno vremena, materijala i podrške kako bi djeca mogla istraživati i manipulirati matematičkim idejama kroz igru.

Djeca su iznimno radoznala i prirodno sklona istraživanju. Kroz igru, oni mogu istraživati različite matematičke koncepte poput uzoraka, količina, kvantitativnih odnosa i promjena. Na primjer, dok sudjeluju u svakodnevnim aktivnostima poput odijevanja, korištenja kalendara ili sudjelovanja u grupnim aktivnostima poput usporedbe količine soka u šalicama, djeca ne samo da primjećuju matematičke situacije već i istražuju njihove uzorke i strukture.

Odgajatelji imaju ključnu ulogu u stvaranju poticajnog okruženja u kojem će djeca moći razvijati matematičke koncepte kroz igru. To može uključivati raspolaganje raznolikim materijalima poput igračkaka, boja, oblika, ali i aktivnosti koje potiču istraživanje i manipulaciju s tim materijalima. Također je važno da odgajatelji budu prisutni kako bi podržali i usmjeravali dječju igru prema matematičkim konceptima.

Igra nije samo igra - ona je put prema učenju. Kroz igru, djeca ne samo da razvijaju matematičke vještine već i kreativno razmišljanje, socijalne vještine, samopouzdanje i motivaciju za učenje. Stoga, stvaranje poticajnog okruženja i podrška od strane odgajatelja ključni su čimbenici u poticanju dječjeg učenja kroz igru, uključujući i razumijevanje matematičkih ideja.

Napredak u odgoju ranog djetinjstva nije samo pitanje pružanja osnovnih vještina poput brojanja ili prepoznavanja boja. Ona se također temelji na poticanju dubljeg razmišljanja i razvoju kritičkih vještina poput algebarskog razmišljanja. Algebarsko razmišljanje, iako se čini kao apstraktna koncepcija za malu djecu, zapravo pruža temelje za razumijevanje složenih matematičkih koncepata i rješavanje problema u kasnijim godinama.

Nužno je shvatiti da algebarsko razmišljanje nije samo o rješavanju jednadžbi ili manipulaciji simbolima. To je sposobnost prepoznavanja uzoraka, predviđanja promjena, identificiranja odnosa i razumijevanja struktura. Kroz iskustva s različitim vrstama uzoraka, matematičkim situacijama i strukturama, djeca razvijaju sposobnost apstraktnog razmišljanja i primjene matematičkih principa na različite situacije.

Nudeći djeci mnoga iskustva s algebarskim razmišljanjem u ranom djetinjstvu, odgajatelji otvaraju vrata za njihov daljnji matematički razvoj. Kroz igru, eksperimentiranje i istraživanje, djeca stječu osjećaj za kvantitativne odnose, što im omogućuje da bolje razumiju svijet oko sebe. Primjerice, igre poput slagalica ili sortiranja po bojama ne samo da potiču finu motoriku, već i potiču djecu da prepoznaju obrasce i odnose među objektima.

Osim pružanja raznovrsnih iskustava, važno je postaviti izazove koji postupno povećavaju razinu složenosti. Djeca vole izazove koji ih potiču da razmišljaju izvan svoje zone udobnosti. Postavljanje pitanja koja potiču matematički dijalog potiče ih da razmišljaju o svojim razmišljanjima i da ih objasne drugima. Ovakav pristup ne samo da razvija njihovo razumijevanje matematike, već i njihove komunikacijske vještine i samopouzdanje.

Iako je važno poticati algebarsko razmišljanje u ranom djetinjstvu, također je bitno osigurati da su iskustva visoke kvalitete. To znači da odgajatelji trebaju biti dobro obučeni i osposobljeni za pružanje poticajnog okruženja koje potiče matematičko razmišljanje. Također, važno je pružiti adekvatne resurse i materijale koji su prilagođeni razvojnim potrebama djece.

LITERATURA

1. Berk, L. E. (2008). Psihologija cjeloživotnog razvoja. Jastrebarsko: Naklada Slap.
2. Bognar, B. (2006). Kako procijeniti kvalitetu akcijskog istraživanja. *Metodički ogledi: časopis za filozofiju odgoja*, 13(1), 49-68.
3. Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington, DC: NAEYC.
4. Čudina-Obradović, M. (2008). *Matematika prije škole*. Zagreb: Školska knjiga.
5. Došen-Dobud, A. (1995). *Malo dijete - veliki istraživač*. Zagreb: Alinea.
6. Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., & Singer, D. G. (2006). *Play = learning: How play motivates and enhances children's cognitive and social-emotional growth*. Oxford: Oxford University Press.
7. Hännikäinen, M., & Munter, H. (2018). Toddlers' play in early childhood education settings. In P. K. Smith & J. L. Roopnarine (Eds.), *The Cambridge handbook of play: Developmental and disciplinary perspectives* (pp. 491–510). Cambridge: Cambridge University Press.
8. Kadum, S., & Kadum V. (2019). *Poglavlja iz didaktike matematike*. Zagreb: Element.
9. Klarin, M. (2015). *Psihologija dječje igre*. Zadar: Sveučilište u Zadru.
10. Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Zagreb: Educa.
11. Lott, J. W. et.all. (2000). Algebra? A gate? A barrier? A mystery! *Mathematics Education Dialogues*, 3(2), 1–12.
12. Ljubetić, M. (2009). *Vrtić po mjeri djeteta*. Zagreb: Školske novine.
13. Malašić, A. (2015). Dijete, odgojitelj, arhitekt – partnersko sukonstruiranje prostorno-materijalnoga okruženja dječjega vrtića. *Život i škola: časopis za teoriju i praksu odgoja i obrazovanja*, 61(1), 123-132.
14. Marendić, Z. (2009). Teorijski okvir razvoja matematičkih pojmova u dječjem vrtiću. *Metodika*, 10(18), 135.
15. Marendić, Z. (2010). Razvoj matematičkih pojmova. *Dijete, vrtić, obitelj*, 16(60), 2-7. <https://hrcak.srce.hr/127938>
16. Mlinarević, V. (2004). Vrtićno okruženje usmjereno na dijete. *Život i škola*, 11(1), 112-119.
17. Montague Smith, A., Cotton, T., et.all. (2018). *Mathematics in Early Years Education* (4th ed.). New York: Routledge.

18. Moses, R. P. (2001). Algebra and activism: Removing the shackles of low expectations—A conversation with Robert P. Moses. *Educational Leadership*, 59(2), 6–11.
19. National Council of Teachers of Mathematics (2002). Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. Joint position statement. Washington, DC: NAEYC and Reston, VA: NCTM. Retrieved from www.naeyc.org/resources/position-statements/psmath.htm.
20. Peteh, M. (2008). *Matematika i igra za predškolce*. Zagreb: Alinea.
21. Samuelsson, I. P., & Johansson, E. (2006). Play and learning—Inseparable dimensions in preschool practice. *Early Child Development and Care*, 176(1), 47–65.
22. Slunjski, E. (2006). Kad djeca pišu, broje, računaju: neobične igre običnim materijalima. Varaždin: Stanek.
23. Slunjski, E. (2012). *Tragovima dječjih stopa*. Zagreb: Profil.
24. Slunjski, E. (2018). *Izvan okvira 3 - Vođenje: prema kulturi promjene*. Zagreb: Element.
25. Soucie, T. (2013). Osjećaj za broj. *Poučak*, 14(53), 62-72. <https://hrcak.srce.hr/112932>
26. Vlahović Š. V. (2009). Matematika za život. *Dijete, škola, obitelj: časopis za odgoj i obrazovanje djece rane školske dobi*, 24, 2-5.
27. Vlahović Š. V., & Kovačić, S. (1999). Kognitivna reprezentacija brojeva u djece različite dobi. *Društvena istraživanja*, 8(4 (42)), 563-577. <https://hrcak.srce.hr/20330>
28. Vlahović Š. V., Vizek Vidović V., & Sudžuka G. (1998). *Kladim se da možeš ...: psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak.
29. Wood, D. (1995). *Kako djeca misle i uče: društveni konteksti spoznajnog razvitka*. Zagreb: Educa.