Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole

Damjanović, Božena

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za razrednu nastavu
Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

Božena Damjanović

Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole

Diplomski rad

Zadar, 2019.

Sveučilište u Zadru

Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja - Odsjek za razrednu nastavu
Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij za učitelje

Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole

Diplomski rad

Student/ica: Mentor/ica:

Božena Damjanović Doc. dr. sc. Maja Cindrić

Zadar, 2019.

Izjava o akademskoj čestitosti

Ja, **Božena Damjanović,** ovime izjavljujem da je moj **diplomski** rad pod naslovom **Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole** rezultat mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na izvore i radove navedene u bilješkama i popisu literature. Ni jedan dio mojega rada nije napisan na nedopušten način, odnosno nije prepisan iz necitiranih radova i ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem da ni jedan dio ovoga rada nije iskorišten u kojem drugom radu pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj, obrazovnoj ili inoj ustanovi.

Sadržaj mojega rada u potpunosti odgovara sadržaju obranjenoga i nakon obrane uređenoga rada.

Zadar, 7. ožujka 2019.

Zahvala

Veliko hvala bi željela uputiti mentorici doc.dr.sc. Maji Cindrić koja me je svojim stručnim vodstvom s puno razumijevanja, ohrabrenja i strpljenja dovela do uspješnog diplomiranja.

Također veliku zahvalu upućujem pedagoginji Katarini na iznimnoj pomoći u realizaciji praktičnog dijela istraživanja, koja mi je svojom profesionalnošću, ljubaznošću i marljivošću omogućila predivno iskustvo s djecom na nastavi. Najljepša hvala i svim učiteljicama koje su pristale na sudjelovanje u ovom radu, pogotovo učiteljici Elzi. Hvala im na svakoj anketi, intervjuu i satu razrednika koje su mi s povjerenjem prepustile.

Željela bih se zahvaliti i svim učenicima i učenicama osnovnih škola te njihovim roditeljima koji su dali suglasnost za sudjelovanje u istraživanju potrebnog za ovaj rad.

Hvala svim prijateljima, kolegama i profesorima na predivnom iskustvu studiranja te veliko hvala mojim roditeljima i braći na bezuvjetnoj ljubavi i potpori.

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu je provedeno istraživanje među učenicima osnovne škole o različitim pristupima računanju. Rad započinjemo problematikom dječjeg znanja iz matematike, od samog početka kroz djetinjstvo i igru do dolaska na nastavu. Budući da su središnja tema ovog rada dječje strategije rješavanja problema s kojima se susreću u matematičkim zadacima, u nekoliko poglavlja su detaljno opisani procesi kojima djeca uče računati s cijelim brojevima od predškolske dobi i konkretnih predmeta koji su osnovani na izravnom oblikovanju situacije do metoda koje ne ovise toliko o problemu, matematički su profinjenije i oslanjaju se na standardni algoritam za računanje. Također je pokazano na koji način i na koje poteškoće učenici nailaze prilikom njihova usvajanja. Usvajanje novog nastavnog gradiva i njegovo uspješno korištenje kasnije, djeci omogućava kvalitetan učitelj. Svi smo svjesni koju ulogu učitelj ima u nastavi, odgoju i obrazovanju. U svrhu dobivanja stvarne slike naših škola i rada učitelja, provedeni su intervjui i anonimne ankete s učiteljima zadarskih škola. Osim s njima, provedeno je istraživanje i među učenicima. Ono je provedeno u dvije zadarske škole. Sudjelovalo 214 učenika 3., 4. i 5. razreda. Učenici su rješavali zadatke koje smo napravili konkretno za ovo istraživanje. Istraživanje je pokazalo razvoj dječjih strategija u nižim razredima osnovne škole. Zadatke računskih operacija iz matematike učenici započinju rješavati sa strategijom rastavljanja brojeva na D i J, a kasnije većina koristi strategiju pisanog računa. Sljedeće što smo istražili je je bila razlika između dječaka i djevojčica u korištenju strategija i procjenjivanja rezultata. Pokazalo se da dječaci efikasnije koriste strategije računanja različitih računskih operacija, a da djevojčice imaju bolju procjenu u nekim zadacima u 5. razredu. I na kraju smo pokazali mišljenja i stavove učitelja zadarskih škola u vezi udžbenika koje koriste na nastavi matematike. Kroz provedenu anketu i intervjue smo zakjučili da se učitelji većinom koriste udžbenikom pri pripremi za nastavu te da su uglavnom zadovoljni izabranim matematičkim udžbenikom.

Ključne riječi: pristupi računanju, strategije rješavanja, udžbenici

ABSTRACT

Representation of different approaches to computing among children in lower grades of elementary school

This thesis represents a study among elementary school children regarding different approaches to computing. In the theoretical part of the thesis we begin with children's early math knowledge, that is, how a child learns during his/her childhood and play until he comes to school. Since the main idea of this thesis are children's strategies for problem solving that they meet in math problems, in the next few chapters children's understanding of calculations and proccesses in which children learn to compute with whole numbers from preschool age and concrete objects which were established in the direct formation of the situation to methods that do not depend so much on the problem, they are mathematically more refined and rely on a standard computing algorithm, are thoroughly explained. In this work we showed in what way students learn and which diffuculties they meet during their learning. Acquiring new teaching material and its successful usage later, allows a good teacher. We are all aware which part a teacher has in class, upbringing and education of children. The goal was to gain insight into our schools and the work of teachers, so interviews and the surveys with teachers from different schools in Zadar are put forward. Besides this, the research among students has been also carried out. There were 214 participants, students of the 3rd, 4th and 5th grade. The students solved the tasks we have made specifically for this research. The research showed the development of children's strategies in the lower grades of elementary school. Students start resovlving computation tasks with disaggregation of tens and units strategies, and later they use written computation strategy. The next thing we explored was the difference between boys and girls in using strategy and evaluating results. It has been shown that boys use the strategy of computation operations more efficiently, and girls have a better estimation in some tasks in the 5th grade. Finally, we showed the opinions and attitudes of the teachers of the Zadar schools regarding the textbooks used in the teaching of mathematics. Through the conducted survey and interviews, we concluded that teachers mostly use textbook material and are generally satisfied with the chosen mathematical textbook.

Key words: approaches to computing, solving strategies, textbooks

SADRŽAJ

1. UVOD

U ovom diplomskom radu polazimo od ideje da većina djece računa na način kojim su podučavani u školi. Osobne strategije koje svaka osoba razvije tijekom učenja za sebe može biti ili ne mora slična onoj naučenoj u školi. Suvremene teorije učenja i poučavanja naglašavaju individualan pristup svakom djetetu s ciljem omogućavanja slobodnog i kreativnog izričaja pojedinca. Postavlja se pitanje da li djeca prolazeći kroz sustav obrazovanja uspiju zadržati taj izričaj. Učitelji, naravno, imaju plan i program koji moraju slijediti, imaju naslove nastavnih jedinica i njihove ciljeve. No, da li je u tom planu i programu dovoljno naglašena važnost razvijanja osobnih strategija i pristupa računanju koji omogućuju učeniku logično i smisleno rješavanje problema? U ovom radu se htjelo pokazati što je moguće više različitih pristupa računanju zadataka sa računskim operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja te kombinacije istih. Također, dok smo proučavali literaturu za ovaj rad, naišli smo na studije koje su istraživale razlike u uspješnosti računanja između dječaka i djevojčica. To nam je bio jedan od problema čiji su se rezultati pokazali vrlo zanimljivim. Spomenuvši rad učitelja, zanimalo nas je u kojoj mjeri oni koriste udžbenike u procesu oblikovanja nastave sata matematike. Pridonosi li propisani nastavni materijal sa standardiziranim algoritmima razvoju osjećaja za brojeve? Sva ova pitanja su nas motivirala na pronalaženje odgovora za bolje razumijevanje pristupa računanju koje djeca imaju tijekom obrazovanja u nižim razredima osnovne škole.

2. Dječja znanja u ranoj matematici

Djeca stječu znanja o skupovima, zbrajanju, oduzimanju, mjerenju već u ranoj predškolskoj dobi. Sve ono što ih okružuje svakodnevno; bilo to kroz igru s drugom djecom, u vrtiću, u kupovini s roditeljima, na putovanjima, sve im to pomaže bolje razumjeti svijet koji ih okružuje, a time i uspješnije rješavanje problema na koje će naići u kasnijem obrazovanju.

Termin "rana matematika" se odnosi na širok raspon koncepata kao što je brojanje (1, 2, 3), količina (manje, više), oblik (krug, kvadrat, trokut), prostorni odnosi (iznad, ispod, iza), mjerenje (viši, niži, veći, manji) te uzorci (žuto, plavo, žuto, plavo). (National Research Council, Sarama, Clements, prema Harris, Petersen, 2017). Budući da su djeca po prirodi znatiželjna, istražuju ove koncepte u interakciji sa svojom okolinom (Ginsburg, Inoue, Seo, prema Harris, Petersen, 2017). Na primjer, mala djeca istražuju matematiku dok se igraju i grade dvorac s kockama. Dok grade, sortiraju kocke prema veličini i boji, uviđaju prostorne odnose, razvijaju razumijevanje koje oblike mogu smjestiti na koji oblik, koji oblici će srušiti dvorac, a koje oblike mogu kombinirati da bi izgradili neki njima prepoznatljiv oblik (Gopnik Sobel Schulz, Glymour, prema Harris, Petersen, 2017). Predškolci broje i uspoređuju predmete dok se igraju, istražuju uzorke i oblike (Seo, Ginsburg prema Harris, Petersen, 2017).

Usvajanje matematičkih pojmova počinje izuzetno rano: neka istraživanja govore o uočavanju jednakosti ili razlika među malim skupovima već kod šestomjesečnih beba (Klein i Starkey, prema Vizek-Vidović, Vlahović-Štetić, Rijavec, Miljković, 2014).
U drugoj godini života, bebe nauče brojevne nazive, ali im ne daju uobičajeno značenje. Na primjer, mogu ih izgovarati dok se penju stepenicama, u dječjim pjesmicama, a da im zapravo ti brojevi ne znače ništa. U trećoj godini počinje učenje brojenja pri čemu do predškolske dobi djeca obično svladaju brojenje do 10, razlikuju glavne i redne brojeve, te nauče pisane simbole za jednoznamenkaste brojeve (Sinclair i Sinclair, prema Vizek-Vidović i sur. 2014). Kada krenu u školu puno djece kod brojanja iznad 20 rade grešku preskakanja desetice (28, 29, 40…), zastajkuju u brojenju na broju koji završava s 9 ili 0, ili izmišljaju nova „logična" imena za brojeve (dvadeset devet, dvadeset deset) (Vizek-Vidović i sur. 2014).

Djeca uče matematiku i jezik po sličnom redoslijedu. Ono započinje u ranom djetinjstvu; učenje jezika i pismenosti se razvija tijekom vremena. Kroz razvoj, djeca grade svoj vokabular, duljinu rečenica, razumijevanje gramatike te sposobnost korištenja dužih i složenijih rečenica (Kipping, Gard, Gilman, and Gorman, prema Harris, Petersen, 2017).

Učenje rane matematike uključuje sličan napredak kao i kod učenja jezika. Djeca u početku nauče osnovni matematički vokabular, zatim kako prepoznati matematiku u svijetu oko njih, a onda tijekom vremena kako izraziti složenije matematičke koncepte koji uključuju mjeru, geometriju i rasuđivanje (Institute of Medicine (IOM) & National Research Council, Janzen, prema Harris, Petersen, 2017). Čitanje knjiga, pričanje priča te korištenje "matematičkog jezika" su lagani i djelotvorni načini kako ugraditi i unaprijediti razvoj rane matematike i rane pismene sposobnosti. Skladan odnos između roditelja i djeteta pomaže djetetu u izgradnji samopouzdanja i osjećaja sigurnosti - a to sve potiče sposobnost ranog učenja.

Možemo zaključiti da djeca uče gradeći već stečeno znanje, koje se nekad i proteže do znanja iz ranog djetinjstva. Učenje i razvoj su procesi stalnog odvijanja koji se protežu godinama. Čak i tijekom navedenog predškolskog perioda, djeca imaju značajno veće razumijevanje i sposobnost rješavanja problema nego što se mislilo prije (U.S. Department of Education, 2008). U sljedećem poglavlju ćemo predstaviti temeljne sustave broja koji se nalaze u svakom čovjeku još od rođenja.

2.1. Sustavi neverbalnog prikaza broja - temeljni sustavi broja

Matematiku možemo opisati kao ljudsku konstrukciju s brojevnim sistemima i pravilima koji nam pomažu razumjeti i riješiti različite vrste problema. Brojanje, računanje i druge matematičke aktivnosti su kulturološki izgrađene i učene (Dehaene, prema Elofsson, 2017).

Međutim, čini se da su temeljni mehanizmi koji podržavaju naše matematičko mišljenje i razumijevanje urođeni te da ih ljudi dijele međusobno u različitim kulturama, ali također i s različitim vrstama (Dehaene, Feigenson et al., prema Elofsson, 2017). Dehaene (prema Elofsson, 2017) govori da ljudi imaju urođeni predverbalni smisao za broj. Djeca ulaze u svijet sa ne samo urođenim općim sposobnostima za učenje, već i s posebnim mehanizmima učenja ili mentalnim strukturama.

Važna matematička sposobnost koja treba biti razvijena tijekom ranog djetinjstva je razumijevanje matematičkih koncepata (Feigenson et al.; von Aster & Shalev, prema Elofsson, 2017). Ovo razumijevanje pruža temelj za dječju sposobnost učenja formalne matematike te stjecanje sposobnosti matematičkog znanja i vještina potrebnih za svakodnevni život u današnjem društvu.

Možemo reći da je ljudski mozak obdaren s dva kognitivna sustava neverbalnog prikaza broja; a to su *Približan brojčani sustav (Approximate number system*) i *Sustav praćenja objekta (Object tracking system*) (Dehaene; Feigenson et al.; Hyde & Spelke, prema Elofsson, 2017). Ovi sustavi se često nazivaju temeljni sustavi broja (Feigenson et al., prema Elofsson, 2017).

2.1.1. Približan brojčani sustav (PBS)

Mnoga istraživanja pokazuju dokaze o temeljnim sustavima znanja u našem mozgu koji nam omogućuju neverbalni prikaz broja bez da ga zapravo prebrojimo, često nazivan *Približan brojčani sustav* (PBS) (Butterworth; Dehaene; Feigenson et al.; Hyde & Spelke,; Piazza, prema Elofsson, 2017).

Ovaj kognitivni sustav nam omogućava prikaz i uviđanje razlika u veličinama između skupova objekata. Na primjer, PBS nas obavještava da je jedan red u trgovini kraći od drugog ili da naš prijatelj ima više kokica u zdjeli nego mi u našoj. U ovim situacijama, mi ne brojimo zapravo broj ljudi koji čekaju u redu na blagajni niti broj kokica koji je ostao, mi samo približno procijenimo broj (Elofsson, 2017).

Dokazi za urođenu sposobnost prikaza i razlikovanja između skupova predmeta (količina) dolazi od istraživanja s novorođenčadi. Pokazalo se da 6-mjesečne bebe mogu razlikovati skupove predmeta s omjerom 1:2, što znači da mogu razlikovati skupove koji sadrže, na primjer, 8 i 16 predmeta (Xu & Spelke, prema Elofsson, 2017) ili 16 i 32 predmeta (Xu, Spelke, & Goddard, prema Elofsson, 2017). Istraživanje Xu i Spelke (prema Elofsson, 2017) je pokazalo da bebe ne mogu razlikovati skupove predmeta s omjerom 2:3 (npr. 8 i 12 predmeta) sa 6 mjeseci starosti. Također, Xu, Spelke i Goddard (prema Elofsson, 2017) su otkrili da novorođenčad ne može razlikovati skupove od 8 i 12 predmeta te 16 i 24. Ovi rezultati govore da postoje ograničenja u prikazu broja kod novorođenčadi.

2.1.2. Sustav praćenja objekta (SPO)

Dokazi upućuju na to da ljudi također imaju drugi temeljni sustav za precizan prikaz brojeva koji nam pomaže brzo otkrivanje i praćenje malih brojeva individualnih predmeta (npr. 1-3(4) predmeta) (Piazza; Van de Walle, Carey, & Prevor; Wynn, prema Elofsson, 2017).
Ovaj sustav se naziva *Sustav praćenja objekta* (SPO) ili *Paralelni sustav individualizacije* (Carey; Dehaene; Feigenson et al.; Piazza, prema Elofsson, 2017).
SPO je ograničen na set od 3 ili manje predmeta (za novorođenčad) ili 4 predmeta (za stariju djecu i odrasle) (Piazza; Spelke prema Elofsson, 2017). Ovaj temeljni sustav nam pomaže u razlikovanju između setova predmeta koji sadrže različite količine predmeta tako da pratimo više individualnih predmeta u isto vrijeme te kodiramo točan brojčani identitet predmeta. Na primjer, zamislimo situaciju u kojoj tri psa trče oko kuće te se nakon nekoliko sekundi dva psa vrate. Zaključujemo da treći pas još mora biti iza kuće. Naš um registrira da su se dva od tri psa vratila. U ovoj situaciji događa se neslaganje u našoj mentalnoj predodžbi (pas, pas, pas) sa stvarnom situacijom u svijetu (pas, pas). Ovo se može opisati kao proces prepisivanja jedan-na-jedan između mentalnog prikaza i stvarnog predmeta (Carey, prema Elofsson, 2017).
SPO daje točnu mentalnu predodžbu što se događa s predmetom koji je dodan ili oduzet malom setu (Carey; Piazza, prema Elofsson, 2017). Prisutnost *Sustava praćenja objekta* se može objasniti iz istraživanja gdje je novorođenčad mogla razlikovati setove koji sadržavaju 1, 2 ili 3 predmeta (npr. 1 i 2, 2 i 3, 1 i 3), ali nisu mogli razlikovati setove od 1 i 4 predmeta (Feigenson & Carey; Feigenson, Carey, & Hauser prema Elofsson, 2017), unatoč tome što omjer između ovo dvoje predlaže da zbog PBS-a bi trebali razlikovati ove setove (Xu, prema Elofsson, 2017). Novorođenčad može razlikovati male setove predmeta (1-3), ali ne uspijeva u razlikovanju između malih setova kad jedan od njih sadrži više od 3 predmeta (Feigenson & Carey; Feigenson et al., prema Elofsson, 2017).

U sljedećem poglavlju ćemo se osvrnuti na povijesni pregled dječjeg matematičkog znanja i razumijevanja.

2.2. Teorije matematičkog učenja i razumijevanja

Prema Rombergu (Grouws, 1992), ne postoji općeprihvaćeni dogovor o definiciji učenja, kako se odvija niti što čini razumljiv dokaz da se učenje dogodilo. Neki kažu da su to promatrane promjene u ponašanju, neki da to znači stjecanje novih znanja, a neki da je to stvaranje ravnoteže.

Psiholozi su dali različite filozofske pretpostavke o prirodi procesa učenja. Oni koji smatraju da je učenje određeno s oblikovanjem veza između poticaja iz okoline i korisnih podražaja se nazivaju asocijacionisti. Predstavnik ove teorije, E.B. Thorndike (prema Rivera, 1996), preporuča da u matematici, na primjer, učenici trebaju puno vježbati točne postupke i činjenice postupkom *drilla* – uvježbavanje postupaka, činjenica i algoritama, da bi ojačali točne mentalne veze. Asocijacionisti su također isticali da kurikulum mora biti oblikovan da drži povezane koncepte odvojeno tako da učenici ne oblikuju netočne veze. Zanimljive podatke istraživanja su dali Bisanz i Dunn (prema Vizek-Vidović i sur. 2014): „Svojim ispitanicima zadavali su nizove zadataka u kojima je trebalo pribrojiti i oduzeti isti broj (npr. 6 + 3 - 3). Odrasli ispitanici kao i šestogodišnjaci nisu računali zbroj i razliku, već su davali izravna rješenja zadataka. Međutim, devetogodišnjaci su izvršavali sve tražene matematičke operacije (6 + 3 = 9, 9 – 3 = 6). Oni nisu naučili pa zatim zaboravili jednostavnije rješenje, nego vjeruju da moraju uvijek računati kad im je zadan takav zadatak. Izvođenje postupka ima prednost nad razumijevanjem da pribrajanje i oduzimanje istog broja dovodi po početnog rezultata. Drugim riječima, postupak je ispred razumijevanja.“

Do 1943., bihevioristi su smatrali da prava znanost o obrazovanju može biti izgrađena na izravnom promatranju. Ono što je bilo odsutno iz istraživanja i predavanja biheviorista je "razmišljanje", "značenje" ili druge neprimjetne i možda nepostojeće pojave. Iako su bihevioristi, vođeni B.F. Skinnerom, odbijali teoriju "mentalnih veza" koje su asocijacionisti predvodili, njihovi recepti za podučavanje matematike su bili slični: *drill* i vježba, s pozitivnim potkrepljenjem - nagrade za poželjno ponašanje u obliku točnih odgovora ili kazne za nepoželjno ponašanje. Bihevioristi su donijeli na edukacijsku scenu učenje kurikuluma po programima i nove standardizirane tehnike testiranja (Rivera, 1996).

„Kognitivističke teorije učenja drže da valja poučavati i razjasniti pojmove i organizirati kognitivne sheme“ (Vizek-Vidović i sur. 2014). Također se neki postupci mogu usvojiti smisleno, a ne mehanički, ali ako su vezani uz samo znanje pojmova. Kognitivistički pristup više ispituje sam proces usvajanja znanja, a ne propisuje toliko recepte za poučavanje. Na temelju nekih istraživanja, mogu se navesti neke preporuke. Kognitivisti smatraju da školska matematike mora uvažavati kognitivni razvoj djece bilo da se radi o razvoju matematičko-logičkih struktura (Riley i sur., 1983) ili o razvoju verbalnog razumijevanja (Kintsch i Greeno, prema Vizek-Vidović i sur. 2014). Školsko poučavanje ne smije zanemariti dječja neformalna znanja koja ona imaju u području matematike. Dapače, djeca mogu uspješno rješavati vrlo složene matematičke probleme ako je situacija u zadanim problemima povezana s njihovim životnim iskustvom (Saxe, Baranes i sur., prema Vizek-Vidović i sur. 2014). „Kognitivisti smatraju da se učenika može poučiti strateški razmišljati tj. direktno poučiti kako rješavati matematičke probleme“ (Vizek-Vidović i sur. 2014).

Što se tiče poučavanja postupaka, ono mora imati jasnu svrhu. Postupci su potrebni za rješavanje matematičkih problema. „Njih treba uvježbati do automatizma, ali ih treba i razumjeti da bi bili primjenjivi u nekoj novoj situaciji. Poznavanje postupka trebalo bi se temeljiti na razumijevanju pojmova. Tako za uspješno svladavanje operacija množenja i dijeljenja djeca moraju razumjeti novo značenje pojedinih brojeva i razumjeti nove situacije u zadacima“ (Vizek-Vidović i sur. 2014).

Tijekom povijesti, postojali su i drugi pogledi na znanje i učenje. Godine 1916. Dewey je rekao "*Rekonstrukcija ili reorganizacija iskustava je ono što pridonosi značenju iskustva te ona povećava sposobnost usmjeravanja naknadnog iskustva*" (prema Rivera, 1996). Jednom drugom prilikom Dewey (prema Rivera, 1996) je napisao da "*Koristim riječ razumijevanje, a ne znanje jer previše ljudi shvaća znanje kao informaciju. Informacija je znanje o stvarima (statično je), i nema garancije da će razumijevanje - izvor inteligentnog djelovanja - proizaći iz znanja.*".

Brownell (prema Rivera, 1996) je tvrdio da iako slučajno učenje može pomoći u suzbijanju prakse podučavanja matematike kao izoliranog predmeta, ono nije pružilo organizaciju u kojoj bi se mogli razviti smisleni pojmovi i inteligentne vještine potrebne za stvarnu aritmetičku sposobnost. Također je pisao o teoriji poduke u kojoj je središnja točka smisao onoga što se uči.

Konstruktivisti su značajno doprinijeli poučavanju matematike, ali i prirodnih znanosti. U svom pristupu, čije je ishodište u teorijama Piageta i Vygotskog, moderni konstruktivisti ističu važnost koju imaju socijalni činitelji u procesu učenja. „Svako učenje, pa tako i učenje matematike i prirodnih znanosti, odvija se kroz socijalnu interakciju tj. učenik će biti potaknut reakcijama drugih učenika (Vizek-Vidović i sur. 2014). Ono što se od učitelja traži je organizacija takvog okruženja u kojem će rasprava pomoći izgradnji učenikova znanja. To će postići uporabom raznih metoda u kojima će biti socijalna interakcija učenika (na primjer suradničko učenja ili rasprava). Učitelj ovako pomaže učeniku nadogradnju novog na već postojeće znanje, daje mu slobodu za stvaranje vlastitih konstrukcija, a poučava pojmove koji su primjereni razvoju učenika.

Konstruktivisti zastupaju mišljenje i da učenici trebaju biti suočeni s bogatom okolinom i složenim situacijama koje će ih potaknuti na drugačije rješavanje problema. Takav način poučavanja može biti odličan način kako dijete primjenjuje znanje iz škole u realnim životnim situacijama. Na nastavi matematike učitelj treba obogatiti okolinu učenika uporabom različitih manipulativnih materijala (temeljne kockice - kockice koje se nadograđuju jedne na druge, žetoni, končići, štapići, grah, sjemenke…). „Ovi materijali nisu samo pomoć u računanju, oni su nužni za poučavanje s razumijevanjem (Vizek-Vidović i sur. 2014).

Piaget i njegovi suradnici koji su intervjuirali stotine djece, su predložili da u učenju, djeca prolaze kroz faze razvoja i da je upotreba aktivnih metoda koje djetetu omogućuju spontano istraživanje može pomoći da ponovno otkrije ili izgradi ono što se uči, a ne samo da mu se servira (Piaget, prema Rivera, 1996).

Piagetovo istraživanje i teorija se zove razvojni konstruktivizam (Romberg, 1969) i govori o tome da djeca stječu znanje o konceptima i operacijama s brojevima tako da ih grade iznutra, a ne preko internalizacije. Piaget (prema Rivera, 1996) ističe da je svaki normalan učenik sposoban za dobro matematičko razumijevanje ako se pažnja (i briga) usmjere na aktivnosti koje su u njegovom interesu, i ako se ovom metodom prevladaju osjećaji bespomoćnosti koje se često nalaze kod učenika u učenju sadržaja iz matematike.

2. 2. 1. Teorija učenja Jeana Piageta

Prema Jeanu Piagetu (prema Rivera, 1996), čovjekov intelektualni razvoj se odvija kronološki kroz četiri dosljedne faze. Redoslijed po kojem se one događaju je gotovo uvijek isti, međutim broj godina u kojima svaka osoba ulazi u određenu fazu može varirati zbog nasljednih obilježja i obilježja okoline u kojoj odrasta.

Piaget je definirao inteligenciju kao sposobnost prilagođavanja na okolinu. Prilagođavanje se događa kroz asimilaciju i akomodaciju, dva nadopunjujuća procesa koji se međusobno isprepleću kroz život na različite načine, ovisno o razini mentalnog razvoja.

U asimilaciji, osoba upija nove informacije, prikuplja podražaje iz okoline u svoje postojeće kognitivne strukture, odnosno pokušavamo je uklopiti u već postojeće sheme ili shvatiti pomoću onoga što već znamo ili razumijemo. U akomodaciji, osoba mijenja kognitivne strukture da bi uskladila nove informacije i prilagodila se okolini, to jest mijenjamo svoje spoznaje da bi mogli razumjeti one nove. Kognitivni razvoj se odvija kroz mnogobrojne pokušaje asimilacije i akomodacije, a balans se pronalazi u njihovoj ravnoteži.

Postoje četiri stadija kognitivnog razvoja koje Piaget razlikuje:

- Senzomotoričko (0 - 2 godine) - djeca počinju koristiti imitaciju, memoriju i misao. Počinju shvaćati da predmeti ne nestaju kada ih ne vide, shvaćaju stalnost predmeta. Napuštaju refleksna ponašanja, a okreću se aktivnosti sa usmjerenim ciljem.
- Predoperacijsko (2 - 7 godina) - djeca postupno razvijaju jezik i sposobnost razmišljanja u obliku simbola. Sposobni su razmišljati o operacijama, vode se logikom, ali imaju teškoće sa shvaćanjem stajališta drugih osoba. Mišljenje je brže, učinkovitije, više socijalno uklopljeno. Pokazuju egocentrizam i centraciju.
- Konkretno operacijsko (7 - 11 godina) - djeca su sposobna riješiti konkretne probleme koristeći se u podlozi logičkim rješavanjem problema. Shvaćaju pravila o konzervaciji, klasifikaciji i odnosnog rasuđivanja.
- Formalno operacijsko (11 - 15 godina) - djeca su sposobna rješavati apstraktne probleme koristeći se logikom, prelaze na razinu hipotetičko-deduktivnog rasuđivanja. Njihovo razmišljanje postaje znanstveno, razvijaju brigu o socijalnim pitanjima i identitetu (Piaget, prema Rivera, 1996).

Piaget predlaže da kada djeca ne razumiju ili imaju teškoće s određenim konceptom, to je zbog prebrzog prelaska od kvalitativne strukture problema (od jednostavnog logičkog rasuđivanja, npr. fizičko postojanje lopte) do kvantitativne ili matematičke formulacije (u obliku razlika, sličnosti, težine, broja, itd.). Stanja koja mogu pomoći djetetu u njegovoj potrazi za razumijevanjem, prema Piagetu je upotreba aktivnih metoda koje dopuštaju djetetu spontano istraživanje i zahtijeva učenje "novih istina", ponovno otkrivanje koje je bar izgrađeno od strane učenika, a ne da mu je jednostavno rečeno (Piaget, prema Rivera, 1996). Istaknuo je da je uloga učitelja biti voditelj i organizator koji kreira situacije i aktivnosti koje predstavljaju problem učeniku. Učitelj također mora pružiti primjere koji vode djecu prema razmišljanju i preispitivanju žurnog rješenja. Piaget tvrdi da učenik koji postiže određeno znanje kroz slobodno istraživanje i spontani trud, kasnije će biti sposoban zadržati ga. Imati će stečeno znanje koje će mu služiti cijeli život, poticati će mu znatiželju bez straha od rizika da će ga iscrpiti.

Sljedeći tip znanja koji Piaget predlaže je socijalno ili konvencionalno znanje. Kaže da malo dijete uvijek nauči jezik kroz vanjsko odgojno djelovanje obiteljskog okruženja, kojeg Piaget naziva "ekspresija sakupljenih vrijednosti." Piaget navodi kako bez vanjskog socijalnog prijenosa (koji je također edukativan) kontinuitet ukupnog razvoja jezika ostaje gotovo nemoguć (Piaget, prema Rivera, 1996).

Sociokulturalna perspektiva Vygotskog također ima velik utjecaj u obrazovanju. Ona karakterizira učenje kao proces socijalnog uvođenja kroz koji učenici postaju sve više i više nezavisni kroz učenje uz pomoć vršnjaka i odraslih s većom količinom znanja. Međutim, njezina korisnost u kurikulumu matematike se još uvijek testira (U.S. Department of Education, 2008).

2. 3. Socijalni, motivacijski i emocionalni utjecaji na vještinu u matematici

Razumijevanje kako djeca stječu vještinu u matematici zahtijeva više pažnje od znanja kako uče u područjima sadržaja. Dječji ciljevi i vjerovanja o učenju su također jako važni.

Za djecu koja žele svladati akademske sadržaje se kaže da imaju ciljeve orijentirane prema svladavanju. Ova djeca pokazuju bolji dugotrajni akademski razvoj u matematici nego njihovi vršnjaci čiji su glavni ciljevi dobiti dobre ocjene ili biti bolji u razredu od drugih. Učenici koji vjeruju da je učenje matematike usko vezano s urođenom sposobnosti pokazuju manje upornosti za složene zadatke nego vršnjaci koji vjeruju da je trud važniji. Eksperimentalna istraživanja su pokazala da dječja vjerovanja o povezanoj važnosti truda i sposobnosti ili urođenog talenta se mogu promijeniti, i da povećani naglasak na važnost truda je povezan s većim angažmanom u učenju matematike i, kroz ovaj angažman, poboljšane ocjene i postignuća u matematici. Istraživanja koja pokazuju da su vjerovanja o trudu bitna i da se ova vjerovanja mogu promijeniti su jako važna. Većina nerazumijevanja javnosti prema obrazovanju matematike (zajedno s uobičajenim sklonostima za odbacivanje slabih postignuća i ranog odustajanja), čini se da ima korijen u ideji da se uspjeh u matematici u velikoj mjeri oslanja na urođeni talent, a ne na trud (U.S. Department of Education, 2008).

Učitelji i autori nastavnih materijala ponekad pretpostavljaju da učenici trebaju biti određene dobi za učenje određenih matematičkih ideja. Naime, veliko otkriće, provedeno od strane Nacionalnog Istraživačkog Vijeća o učenju prirodnih znanosti je dalo rezultat da ono što je razvojno prikladno nije povezano s brojem godina ili razreda, već u velikoj mjeri ovisi o prijašnjim mogućnostima učenja. Tvrdnje osnovane na Piagetovoj teoriji te na ostalim teorijama "razvojne prikladnosti" koje govore da djeca određene dobi ne mogu učiti određeni sadržaj jer su "premladi", "nisu u prikladnoj dobi" ili "nisu spremni", su dosljedno bile dokazane krivim. Također postoje tvrdnje koje govore da djeca ne mogu naučiti određene ideje jer im mozgovi nisu dovoljno razvijeni, iako posjeduju preduvjete za učenje tih ideja (U.S. Department of Education, 2008).

U sljedećem poglavlju ćemo opisati kako te preduvjete djeca shvaćaju i prikazuju okolini, odnosno kako izražavaju osjećaj za matematiku, osjećaj za brojeve.

3. Number sense – osjećaj za brojeve

Jednog dječaka su promatrali ispitivači i dali mu zadatak iz matematike. Nakon što je napisao problem 37 + 25 u vertikalnom obliku, i nakon što je podvukao horizontalnu crtu, rekao je odgovor 62. Slijedi razgovor o problemu:

"Dobro", rekao je ispitivač, *"reci mi kako si to izračunao."*

"U redu", rekao je dječak oklijevajući, *"ali nemojte reći mojoj učiteljici. Računao sam 37 i 20 je 57 i još 5 je 62."*

"To je jako dobar način," kaže ispitivač. *"Zašto ne mogu reći tvojoj učiteljici?"*

"Jer onda ne bi dobio ocjenu. Ne razumijem način na koji nam ona kaže da napišemo na papir, tako da ja ovako riješim u svojoj glavi, a onda napišem rezultat i dobijem ocjenu."

Prodavačica je radila u knjižari u Engleskoj. Kupac je htio kupiti dva identična dnevnika, svaki s početnom cijenom od 2,50£, ali sada su bili označeni "u pola cijene". Kupac je uzeo dva dnevnika i odnio ih na blagajnu. *"Koliko bi ovo koštalo, molim vas?"*, upitao je.

Prodavačica je uzela prvi dnevnik i olovku, napisala početnu cijenu, podijelila s dva koristeći standardni pisani algoritam za dijeljenje na dugi način, i dobila novi cijenu od 1.25£. Zatim je uzela drugi identični dnevnik, napisala početnu cijenu, ponovno koristila standardni pisani algoritam i dobila novu cijenu od 1.25£. Zatim je napisala 1.25, ispod 1.25, točno ih zbrojila koristeći standardni pisani algoritam, obratila se kupcu i s osmjehom rekla, *"To bi bilo 2.50£."*

Dječak nije mogao pratiti formalni pisani algoritam ali je dovoljno razumio o brojevima da osmisli svoju vlastitu učinkovitu usmenu metodu. Prodavačica je pokazala besprijekorno računanje u pisanom algoritmu, ali je otkrila zabrinjavajući nedostatak svijesti o osnovnim vezama aritmetike (McIntosh, Reys, Reys, 1992).

Jedan od najvećih razloga za poboljšanje dječjih vještina u računanju je u razvoju osjećaja za brojeve (*number sense*) koji se koristi u svakom obliku računanja. Prije rasprave o samom osjećaju za brojeve, bilo bi korisno objasniti prirodu usmenih algoritama.

Usmeni račun prema Reysu (prema Jones, Kershaw & Sparrow, 1994) je "*proces izvršavanja aritmetičkih računa bez pomoći kalkulatora ili drugih pomagala.*" Karakteristike usmenih algoritama prema Plunkettu (prema Jones i sur. 1994) se mogu opisati kao: prolazni i često teški za objasniti, uspješno korištenje mnogo različitih metoda koje dovodi do istog rješenja, prilagodljivi i za jednostavne i za složene račune, jedinstveni su korisniku koji odabire metodu i organizira račun na poseban način, nisu namijenjeni pisanju postupka korak po korak, odražavaju trenutnu razinu brojevnog razumijevanja, korisni u određivanju približnog rješenja prije ili umjesto točnog, teški su za korištenje kod složenih operacija ili velikih brojeva.

Opis prirode usmenog računa je koristan u istraživanju metoda koje koriste djeca. Sljedeća dva problema i neki dječji odgovori pokazuju dokaze mnogih navedenih karakteristika. Istraživanje provedeno među grupom 10-godišnjaka je tražilo pisani opis kako usmeno računaju 48 + 9. Odgovori su sljedeći:

"8 i 8 je 16 i još 1 je 17, plus 40, 57"

"48 i 10 je 58, minus 1, 57"

"9 i 1 je 10, plus 48, 58, minus 1"

"48 i 2 je 50, još 7 je 57"

"8 i 9 je 17 i to je 57"

(Jones i sur. 1994)

U sljedećem istraživanju sudjelovala je sedmogodišnja djevojčica koja je upoznata s metodama olovke i papira te zbrajanjem dvoznamenkastih brojeva. Od nje se tražilo usmeno računanje zbroja 246 + 178. Njen iskaz pokazuje neke navedene karakteristike, pogotovo znanje o brojevima i izmišljenim postupcima.

"*Dakle, 2 i 1 je 3, tako da znam da je to 200 i 100, i sada znam da je to oko 300. I onda moraš dodavati desetice. A desetice su 4 i 7…. Ako kreneš 70, 80, 90, 100. I to je četiri stotine. Pa si već u tri stotine zbog 100 + 200, ali sada si u četiri stotine zbog 40 + 70. I sada imaš još jednu deseticu. Pa ako kreneš 300 + 40 + 70, imaš 410. Ali ne radiš to. Nego trebaš dodati 6 i 10, što je 16. I još 8: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. I to je 124. To jest 424*" (Carpenter prema Jones i sur. 1994).

Ideje o brojevima i načini na koji su veze između brojeva korišteni u prethodna dva primjera također pokazuju dokaz o onome što se zove osjećaj za brojeve.

Osjećaj za brojeve je opisan na mnogo načina:

- "Kao aspekt zdravog razuma" (Sowder & Sowder, 1989)
- "Kao povezanost s višim redom razmišljanja i rasuđivanja" (Resnick, 1989)
- "U metakognitivnim pojmovima npr. nadgledanje znanja o dijelovima brojeva" (Silver, 1989)
- "Čisto razumijevanje veza između brojeva, njihove uporabe i konteksta problema" (Greenes, Schulman & Spungin, 1993)
- "Dobro organizirana mreža koja omogućuje pojedincu povezivanje brojeva i svojstva operacija te rješavanje problema s brojevima na fleksibilan i kreativan način" (Sowder, 1992) (prema Jones i sur. 1994).

Ideje o osjećaju za brojeve nije lako dokučiti, i brojni teoretičari su tek nedavno počeli istraživati što to stvarno znači imati i upotrebljavati znanje o brojevima. Nije potpuno jasno što je to znanje točno niti kako se njime upravlja. Naravno, postoji općenito prihvaćanje da je osjećaj za bojeve povezan s razmišljanjem o broju, biti kreativan s brojevima, razvijanjem organizacijskih procesa koji pomažu povezati ideje o brojevima te njihovo razumijevanje u različitim kontekstima (Howden, 1989). Vještine procjene i određivanja približnosti rješenja su također posebno važni u vještini usmenog manipuliranja brojevima. Neki primjeri koji pokazuju da djeca imaju osjećaj za brojeve su navedeni ovdje:

a) Dijete koje razmišlja o 45c kao tri novčića od 10c i tri novčića od 5c koje može podijeliti s još dva prijatelja - razmišljanje o brojevnim vezama unutar konteksta
b) Znanje da je razlika između 6 i 9 ista kao i između 436 i 439
c) Znanje da 1 000 kuglica neće stati u jednu staklenku - razumijevanje veličine u relaciji s kontekstom
d) Znanje da stvari koje koštaju 85c i 1.05$ su jako blizu cijeni od 1$ te da će ukupan račun biti oko 2.00$ - upotreba procjene za provjeru razumijevanja rezultata
e) Djeca i odrasli često koriste izraze kao "zaokružimo" u razmišljanju o brojevnim simbolima kao količini, kao što je računanje tri čokolade gdje je svaka 95c, "zaokružimo" da je svaka 1.00$, te bi račun bio 3.00$ i oduzmemo 15c - fleksibilno razmišljanje o računu

f) Shvaćanje da će 73 - 29 dati isti odgovor kao 74 - 30, zato što kad je "1" dodan 73, također je dodan 29 da se održi ista razlika među brojevima - veze između brojeva (Sowder; Greenes et al. prema Jones i sur. 1994).

U svojoj osnovi, osjećaj za brojeve se odnosi na općenito razumijevanje osobe o broju i operacijama, koje također u sebi nosi sposobnost i sklonost za upotrebu ovog razumijevanja za razvijanje korisnih strategija za rukovanje brojeva i operacija. Odraz je sklonosti i sposobnosti za korištenje brojeva i kvantitativnih metoda kao sredstvo komunikacije, procesiranja i interpretacije informacija. Ono rezultira u očekivanju da su brojevi korisni i da matematika ima određenu pravilnost, odnosno da ima smisla (McIntosh i sur. 1992).

Također podrazumijeva sposobnost trenutne identifikacije brojevne vrijednosti povezane s malim količinama, sposobnost osnovnog brojenja, vještina u procjeni malog broja predmeta, te u jednostavnim računskim operacijama. Intuitivni osjećaj s malim brojevima je uočljiv među većinom petogodišnjaka, koji mogu, na primjer, točno odrediti koji je jednoznamenkasti broj veći, procijeniti broj točkica na papiru i odrediti koje mjesto otprilike zauzima jednoznamenkasti broj na brojevnoj crti. Ove kompetencije uključuju temeljni osjećaj za brojeve koje djeca običnu steknu prije polaska u školu.

Do kraja 5. ili 6. razreda, djeca bi trebala imati snažan osjećaj za brojeve. On mora uključivati razumijevanje mjesne vrijednosti i mogućnost sastavljanja i rastavljanja cijelih brojeva. Mora jasno uključivati shvaćanje osnovnih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, uporabu komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, vještinu računanja te rješavanje problema. Vještina računanja zahtijeva automatizam zbrajanja i povezanog oduzimanja, te množenja i povezanog dijeljenja. Vješta upotreba ovih algoritama ne ovisi samo o automatizmu brojevnih činjenica već ih učvršćuje. Snažan osjećaj za brojeve isto tako uključuje mogućnost procjene rezultata računanja, npr. koliko ljudi stane na stadion ili koliko litara vode je potrebno da se napuni bazen. Ovaj viši razvoj osjećaja za brojeve se treba proširiti na brojeve pisane u razlomcima, decimalama, postocima i eksponentnim oblicima. Jako puno učenika osnovne i srednje škole nema sposobnost usporedbe veličina takvih brojeva. Ovo je ozbiljan problem jer loš osjećaj za brojeve otežava učenje algoritama i brojevnih činjenica te sprječava upotrebu strategija za provjeru rezultata (U.S. Department of Education, 2008).

Kao jedan od standarda nastave matematike postavlja se upravo osjećaj za brojeve i numeraciju. Od vrtića do kraja četvrtog razreda, od nastavnog plana matematike se očekuje da učenici mogu izgraditi značenja brojeva kroz iskustva koja stječu u realnom svijetu te uporabom konkretnih materijala. Dalje, učenici moraju razumjeti naš brojevni sustav povezujući pojmove brojanja, grupiranja i mjesne vrijednosti, moraju razviti snažan osjećaj za brojeve te znati prikazati brojeve zapažene u stvarnom svijetu. Da bi mogli shvatiti razne načine na koje se brojevi mogu rabiti u svakodnevnom životu, nužno je da ih razumiju. Moraju ih smisleno koristiti da bi odredili količinu, predmet iz skupa, položaj, imenovanje te mjerenje. A ono što je vrlo važno za daljnji rad s brojevima, njihovo računanje, je razumijevanje mjesne vrijednosti.

Dobra intuicija o vezi među brojevima pomaže učenicima u prosudbi razumnosti svojih rezultata. Za imati takvu intuiciju važno je imati dobar osjećaj za brojeve. „Djeca s dobrim osjećajem za brojeve: dobro razumiju značenje brojeva, uočavaju povezanost među brojevima, prepoznaju relativne veličine brojeva, prepoznaju utjecaj operacija na brojeve i mogu mjeriti predmete i situacije u svojoj okolini“ (Matkina biblioteka, 2000).

O važnosti i značenju broja, djeca kroz školovanje shvaćaju postupno. Ono što učitelji mogu napraviti je; dati učenicima vježbe koje uključuju konkretne predmete, a nakon svladavanja toga, učenicima omogućiti slobodno objasniti vlastito mišljenje o radu s brojevima. Ovakav poticajan i ohrabrujući pristup daje učenicima priliku da izgrade svoje osobno značenje broja. Vrlo je važno da se pri izgradnji osjećaja za brojeve, u radu sa brojevnim simbolima, koriste konkretni materijali. „Naglašavanje istraživačkih iskustava, koja se grade na iskustvima djece, unapređuje njihov osjećaj matematičke sposobnosti, osposobljava ih da izgrađuju i produžavaju povezanost brojeva i pomaže im da razviju povezanost između svojega svijeta i svijeta matematike“ (Matkina biblioteka, 2000).

U sljedećem poglavlju ćemo utvrditi u kojoj mjeri se očituje osjećaj za brojeve u svakodnevnom životu, a u kojoj mjeri u školskim situacijama.

3.1. Svakodnevne situacije

Svijet ljudi i svijet matematike je jako povezan. Gotovo da i nema područja koje se u životu ne može povezati s brojem, količinom, mjerenjem, omjerom… U tom dodiru sa svime

što ga okružuje, prirodno je da čovjek razvije neke svoje metode i strategije koje mu pomažu nositi se sa svojim okruženjem. Metode koje koriste odrasli u svakodnevnoj matematičkoj aktivnosti se može nazvati kao "narodna" matematika gdje "problemi… riješi ih tako da vidiš koliko će koštati, koliko dugo će trebati, koliki je rezultat, koliko je potrebno" (Maier, prema Jones i sur. 1994).
I sami smo svjedoci da se matematičke radnje u svakodnevnim situacijama rješavaju zbog nekog razloga i s metodama različitim od onih koje se uče u školi. Odrasli rade brze usmene račune često koristeći izmišljene strategije kojima prije dobiju procjenu nego točan rezultat. Ljudi uvijek pronađu način da si olakšaju pa se tada posluže i tehnologijom. Kalkulator se može koristiti ako su brojevi veliki, ako treba više računski radnji ili gdje se traži točan rezultat. Druge tehnološke usluge, kao što je tablica na računalu za računanje i predviđanje tjednih troškova, može se također koristiti.

Kad su suočeni s računanjem u svakodnevnim situacijama, metode računanja odabrane od strane odraslih ovise o mnogim faktorima. One uključuju strategije i znanje o brojevima dostupne osobi, kontekst problema, željeni rezultat ili razlog za uzimanje zadatka, mogućnosti za računanje i osjećaj kompetentnosti osobe o rješavanju zadatka uspješno. Na primjer: recept za obrok za 6 - 8 ljudi zahtijeva 3/4 čaše vode. U istraživanju je sudjelovala odrasla osoba te je zadatak bio kako bi prepolovio 3/4 vode. Osoba je procijenila 1/2 od 3/4, to bi bilo više od 1/4 ali manje od 1/2 čaše. "*Samo bi pogledao u čašu, procijenio polovicu i ulio više od četvrtine*", rekao je. Kad su ga istraživači pitali zašto nije upotrijebio svoje znanje o množenju razlomaka (koje je naučio u školi), npr. $1/2 \cdot 3/4 = 1\cdot 3 \ / \ 2\cdot 4 = 3/8$, nasmijao se. "*Skroz nepotrebno za ovaj zadatak. Jelo bi bilo sasvim ukusno bez svog tog napora*" (Jones i sur. 1994). Ako se osvrnemo na ovaj primjer i korištene metode, možemo primijetiti da: za prikladnu situaciju su odabrane praktične procedure, osoba je morala imati neko znanje o razlomcima, za neke mjere je potrebna procjena, usmeni račun i približne mjere su dale zadovoljavajući rezultat, papir i olovka nisu nimalo bili potrebni za rezultat, a metode naučene u školi uopće nisu bile korištene.

Ne samo odrasli već i djeca u sličnim svakodnevnim situacijama često koriste razne usmene strategije za rješavanje problema koje uključuju računanje. Na primjer, mnoga djeca koriste izumljene procedure zbrajanja gdje se desetice i stotice računaju prije jedinica. Tipičan primjer je dječak Chris, osmogodišnjak, kojeg su istraživači pitali koliko su on i prijatelj skupili bodova u kriketu. "*Pa… Ja sam skupio 37 i Michael 24, znači to je 50… Vidite, 30 i 20 su 50 i 7 i 3 su 10, pa je to 60, i još jedan… to je ukupno 61.*" Ova procedura se obično ne uči u školi (Atweh prema Jones i sur. 1994).

Osvrt na školske situacije ćemo napraviti u sljedećem poglavlju.

3.2. Školske situacije

U ranim godinama obrazovanja, od vrtića do četvrtog razreda, većina problemskih situacija s kojima se učenici susreću na nastavi matematike, pronalazi inspiraciju iz školskih ili svakodnevnih iskustava. Kada se matematika na prirodan način razvija iz problemskih situacija vezanih za okolinu učenika, oni uviđaju njenu važnost, te postaje lakše povezati znanje učenika s različitim situacijama. Kroz godine i svoje obrazovanje, učenici bi trebali imati susret sa što različitijim i složenijim situacijama života kojima je korijen zapravo realan matematički sadržaj. „Kada rješavanje problema postaje sastavni dio podučavanja u učionici i kad učenici iskuse uspjeh u rješavanju problema, oni dobivaju samopouzdanje te postaju uporni i radoznali. Također, rastu i njihove sposobnosti da se matematički sporazumijevaju i razmišljaju na višoj razini“ (Matkina biblioteka. 2000).

Cilj poučavanje matematike u školi je poučiti učenike razumijevanju prirodnih zakonitosti te olakšati svakodnevnicu poznavanjem matematičkih strategija i tehnika. Što se iskustva iz škole više i jasnije nadovezuju na svakodnevna iskustva djece, to im je jasnija primjena same matematike. A samim time će rezultati biti trajniji i bolji. Dječje poimanje matematike se stalno mijenja sa odrastanjem, sa njihovim razvojem te novim iskustvima. To je stalan proces, a školski program, ako želi biti uspješan, mora stalno birati, tražiti i mijenjati sadržaje koje su primjereni dječjem razvoju te ih povezati u već postojeća znanja i ideje. Nažalost, često se događa da poučavanje u školi ponekad zanemari iskustvo djece, a od njih traži suočavanje sa apstraktnim pojmovima i operacijama. „Dječje iskustvo mora prethoditi pisanim simbolima koje školski programi prebrzo uvode“ (prema Vizek-Vidović i sur. 2014). Djeca su svjesna da za matematiku u svakodnevnom životu, samo baratanje simbolima nije potrebno, bitno je razumjeti problem i riješiti ga na smislen način. U nekim udžbenicima možemo jako rano naići na algebru. Ono što ona od djece zahtijeva pri početku drugog razreda je rješenje problema*:*

k = 0. Koliko je k + 6? (Paić, Manzoni, Marjanović, Kosak, 2013). Brojke i slova postavljene na ovaj način, djetetu ne predstavljaju zadatak koji ima smisao i samim time se čini težak.

Škola, nerijetko, uči kako je matematika nešto apstraktno i izvan dječjeg iskustva ili čak u suprotnosti s njim (Boulton-Lewis i Tait, prema Vizek-Vidović i sur 2014). Poučavanje konkretnih matematičkih zadataka započinje aritmetikom gdje su razni konkretni materijali ili dječji prstići samo pomoć pri računu, a ne osmišljavanje situacija. Odnosno, naglasak je na matematičkim operacijama s brojevima, a ne na rješavanju problema. No, ako se na nastavi krene s rješavanjem problemskih zadataka, a djeca ih rješavaju uspješno i bez korištenja matematičke simbolike, nastava će biti puno bliža djeci, zanimljivija, a na kraju i uspješnija. „Tako poučavana djeca bolje razumiju matematičke simbole, uspješnije rješavaju probleme, a računaju jednako uspješno kao i djeca poučavana na klasičan način (Krogh, 1994. prema Vizek-Vidović i sur 2014).“ Učenici s kojima se pretežno i većinski radi samo računanje, koriste školsku matematiku mehanički. Kada naiđu na problemske zadatke, doživljavaju ih apstraktno, te smatraju da ih ne moraju razumjeti da bi ih riješili. Oni učenici koji su tradicionalno poučavani prije svega nauče postupak izvođenja neke računske radnje. U slijepom radu s brojkama, potpuno zanemare sam smisao zadatka pa rijetko i ne uvide nelogičnosti u svom rješenju. „Tako je 76 od 97 učenika prvog i drugog razreda "uspješno" odgovorilo zbrajajući zadane brojeve na zadatak: "*Na brodu je 26 ovaca i 10 koza. Koliko je star kapetan?*" (Schoenfeld prema Vizek-Vidović i sur 2014). Nažalost, ni stariji učenici nekad ne povezuju pitanje u zadatku sa stvarnim životom. „Oko 70% trinaestogodišnjaka točno *izračuna* odgovor na zadatak: "*U vojni autobus stane 36 vojnika. Ako 1128 vojnika valja prebaciti autobusima do odredišta, koliko je autobusa potrebno?*" Nešto manje od trećine onih koji su točno izračunali točno odgovori da su potrebna 32 autobusa (1128:36=31 i ostatak 12). Dvije trećine učenika odgovara "31" ili "31 i ostatak 12" (Silver prema Vizek-Vidović i sur 2014).

Nažalost se *školska matematika* svodi većinom na pisano računanje s nekoliko aktivnosti usmenog računa. Pisano računanje u školi uglavnom uključuje nekoliko primjera iste operacije, npr. 37 + 45, 9 + 16, 139 + 64. Zadaci sa riječima se tek povremeno spomene. Oni uglavnom sadrže precizne informacije (Maier prema Jones i sur. 1994) i pitanje na koje treba odgovoriti. Od učenika se onda očekuje korištenje određene procedure za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje koje su naučeni da bi došli do točnog odgovora. Papir i olovka su korišteni da bi se pokazao svaki korak rješavanja zadatka. Značajno puno vremena je potrošeno na vježbanje kako koristiti naučene metode s ciljem davanja točnog rezultata. Vježbe uglavnom počinju s nizom rezultata koji pokazuju samo brojeve i simbole. Ovo je praćeno s nekim "problemskim" zadatkom riječima koji traži od djece uporabu identične operacije koju su upravo vježbali, kao što je vidljivo u primjeru s kapetanom i vojnicima. Djeca ne moraju interpretirati pitanje da bi se razumno odlučili za prikladnu operaciju.

U školi, formalne "usmene" aktivnosti, ili usmena aritmetika kako se inače zove, su većinom kratki setovi brzih i točnih računa gdje se pretpostavlja da se račun izvodi "u glavi" koristeći naučene pisane procedure (Reys, 1984). Ovdje je naglašeno trenutno dosjećanje činjenica. Od djece se očekuje da napišu rezultat na dana pitanja koja često imaju malo ili čak niti malo veze sa svakodnevnim situacijama. Kada rješavaju problem u školi, učenici često nemaju izbor, kao što ga imaju djeca i odrasli u svakodnevnim situacijama. Izbor nije dostupan za odabir prikladnog rješenja za zadatak (npr. papir i olovka, kalkulator, usmeni račun), strategiju, način na koji je račun napravljen ili ishod za određenu situaciju (npr. točan odgovor, procjena).

3. 2. 1. Veza svakodnevnih i školskih metoda

Izbor i upotreba određenih metoda koje su korištene u "narodnoj" matematici i vrijeme posvećeno učenju ovih metoda u školskoj matematici pokazuje velike razlike. Rezultati dvaju istraživanja o metodama koje većina odraslih koristi u svakodnevnim zadacima pokazuju da je usmeni račun na visokom mjestu kao metoda za rješavanje problema. Wandt i Brown (prema Jones i sur. 1994) su zaključili da odrasli koriste usmeni račun za 75% zadataka, a papir i olovku za samo 25%. Još jedno kasnije istraživanje je dalo sličan rezultat koje govori da se više od 80% svakodnevnih problema rješava uz pomoć mentalnog računa i procjene (Reys i Reys prema Jones i sur. 1994). Sinteza ovih rezultata su prikazani u Tablici 1. Usmena matematika je omiljena za 75% svakodnevnih matematičkih zadataka odraslih, dok su u školi samo 10% zadataka predstavljenih djeci provedene kao usmene aktivnosti, obično kao usmeno dosjećanje činjenica.

Tablica 1: Usporedba metoda korištenih u "narodnoj" i školskoj matematici

	Pismeno	Usmeno	Kalkulator
Narodna	10%	75%	15%
Školska	85%	10%	5%

Danas se većina učitelja, matematičara i psihologa kojima je područje rada matematika, smatra da djecu treba prije svega podučiti kako matematika počinje „s mentalnom reprezentacijom problema, ona je proces razmišljanja o mogućim putevima za rješenje, a tek potom simboličko prikazivanje problema i izvođenje matematičkih operacija“ (prema Vizek-Vidović i sur 2014).

U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti na koji način mala djeca razvijaju strategije za rješavanje, nama odraslima, jednostavnih matematičkih zadataka te s kojim problemima se susreću prilikom njihovog izvođenja.

4. Dječje strategije za rješavanje problema

4.1. Razvoj vještina-strategija s cijelim brojevima

Cijeli brojevi su najlakši za razumjeti i koristiti. Kao što smo već rekli, većina djece nauči brojati vrlo rano i razumiju puno načela brojeva na koje se brojanje zasniva. Iako djeca krenu u školi s neobično ograničenim znanjem o broju, intenzivne aktivnosti se mogu organizirati i pomoći djetetu da dođe do razine kao što su i njegovi vršnjaci. Dječja vještina brojanja pruža osnovu za rješavanje jednostavnih problema zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s cijelim brojevima. Iako imaju puno toga za naučiti kada krenu u školu, djeca počinju s značajnim znanjem koje se može nadograđivati.

U ovom poglavlju ćemo proučiti razvoj vještina s cijelim brojevima. Pokazati ćemo metode rješavanja brojevnih problema koji su intuitivni, konkretni i osnovani na izravnom oblikovanju situacije do metoda koje ne ovise toliko o problemu, matematički su profinjenije i oslanjaju se na standardni simbolički zapis. Neki oblici ovog razvoja se mogu vidjeti i u operacijama s jednoznamenkastim i višeznamenkastim brojevima.

Usredotočiti ćemo se na računanje s cijelim brojevima jer učenje računanja može pružiti djeci priliku za rad na mnogim brojevnim konceptima. Ovo učenje pruža temelj za njihov kasniji matematički razvoj. Računanje s cijelim brojevima zauzima većinu kurikuluma u nižim razredima te prikladno učenje ovih sadržaja u ovim razredima poboljšava dječje šanse za kasniji uspjeh.

Veći dugi niz godina, učenje računanja se gleda kao uspješno praćenje učiteljevih uputa i vježbanja dok se ne dostigne brzina. Promjene u zahtjevima karijera te onima koje donosi svakodnevni život, kao i dostupnost novih alata za računanje, znači da se sada i više očekuje od poučavanja računanja. Više nego samo dati odgovor, računanje se sve više vidi kao prozor u duboku strukturu brojevnog sustava. Na sreću, istraživanja su pokazala da se i vješto izvođenje i razumijevanje koncepta razvija istom vrstom aktivnosti (National Research Council, 2001).

4. 2. Računske radnje s jednoznamenkastim cijelim brojevima

Kada djeca krenu u školu, velik dio njihove brojevne aktivnosti im pomaže biti vještiji u jednoznamenkastoj aritmetici. Ono što se misli pod jednoznamenkastom aritmetikom su sume i produkti jednoznamenkastih brojeva, te njihove razlike i količnici (npr. $5 + 7 = 12$, $12 – 5 = 7$, $12 – 7 = 5$ i $5 \cdot 7 = 35$, $35 : 5 = 7$, $35 : 7 = 5$). Preko više od stoljeća, učenje jednoznamenkaste aritmetike se u SAD-u smatralo kao "učenje osnovnih činjenica", i naglasak je bio na njihovom zapamćivanju (National Research Council, 2001). Koristi se naziv *osnovne brojevne kombinacije* da bi se naglasilo to da je znanje povezano i da se ne mora mehanički pamtiti. Odrasli i vještija djeca u matematici koriste različite strategije, uključujući automatska ili poluautomatska pravila i procese razumijevanja da bi uspješno izračunali osnovne matematičke kombinacije (Baroody, 1984b).

Znanje o vezama, kao što je znanje o komutativnosti, ne uključuje samo učenje osnovnih matematičkih kombinacija, već može biti podloga ili utjecaj na mentalno razvijanje osnovnog znanja.

Područje ranog broja, uključujući dječje početno učenje o jednoznamenkastoj aritmetici je nedvojbeno najviše proučavano područje školske matematike. Velik broj područja istraživanja u mnogim zemljama se sada bavi načinom na koji djeca računaju jednoznamenkaste operacije s cijelim brojevima. Iako su neki nastavnici vjerovali da djeca zapamte "osnovne činjenice" kao uvjetovane odgovore, istraživanja su pokazala da se djeca ne kreću od nikakvog znanja o sumama i razlikama brojeva do zapamćivanja osnovnih brojevnih kombinacija. Umjesto toga, oni se kreću kroz nizove postupno naprednijih i apstraktnijih metoda za rješavanje problema jednostavnih aritmetičkih problema. Nadalje, kako djeca rastu, koriste ove postupke sve uspješnije i uspješnije (Jerman, 1970). Noviji dokazi govore da djeca mogu koristiti ovakve postupke zapravo jako brzo (Baroody prema National Research Council, 2001). Ne idu sva djeca istim putem, ali sva djeca razviju neki posredni i privremeni postupak. Većina djece nastavlja koristiti te postupke povremeno i za neke oblike računanja. Dosjećanje konačno postane dominantna metoda za neku djecu, ali trenutna istraživanja dječjih metoda ne mogu dovoljno razlikovati odgovore koji su proizašli iz dosjećanja i one koji su uopćeni brzim postupcima (ne dosjećanjem).

Sljedeće poglavlje opisuje složene procese kojima djeca uče računati s cijelim brojevima.

4. 2. 1. Problem riječima: kontekst sa smislom

Jedan od najznačajnijih konteksta u kojima mala djeca počinju razvijati svoju vještinu s cijelim brojevima je kroz probleme riječima. Ova tvrdnja je vjerojatno veliko iznenađenje mnogima, pogotovo učiteljima matematike u osnovnim školama čiji učenici imaju posebne poteškoće s takvim problemima. No mnoga istraživanja pokazuju da ako djeca mogu brojati, ona počinju koristiti svoje vještine brojanja za rješavanje jednostavnih problema riječima. Nadalje, mogu unaprijediti brojevne vještine ako rješavaju što više problema (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, Weisbeck, 1993). Zapravo, upravo u rješavanju problema riječima mala djeca imaju priliku pokazati svoje najnaprednije oblike brojanja te izgraditi postupke računanja. Puno djece koja krenu u školu mogu brojati i riješiti probleme riječima koji uključuju zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje (Carpenteri sur., 1993). Njihova izvedba se povećava ako su problemi oblikovani na jednostavan način, ako sadrže male brojeve i ako djeca imaju fizičke predmete koje mogu koristiti. Neki od primjera zadataka i načina kako ih djeca rješavaju:

Ema ima 8 kolačića. Pojela je 3. Koliko ih je Emi ostalo?
Ema ima 3 dolara za kupovinu kolačića. Koliko još dolara mora zaraditi da bi imala 8 dolara?
Ema ima 3 dolara. Tom ima 8 dolara. Za koliko više dolara Tom ima od Eme?

Većina odraslih bi riješila ove probleme oduzimajući 3 od 8. No maloj djeci, ovo su tri različita problema, koje rješavaju koristeći različite strategije. Kao primjer rješavanja nam mogu poslužiti sljedeći opisi načina od djevojčice koja je tek krenula u prvi razred osnovne škole. Riješila je prvi problem s fizičkim objektima tako da je stavila njih 8, a potom maknula 3. Otkrila je odgovor brojeći one što su preostali. Drugi problem je riješila na način da je krenula s 3 predmeta te je dodavala dok nije došla do ukupnog broja od 8. Izbrojala je 5 predmeta koje je dodala u početni set da bi pronašla odgovor. Za treći problem je napravila dva seta, jedan koji sadržava 3 predmeta i jedan koji sadržava 8. Poredala ih je tako da set od 3 odgovara 3 predmeta iz seta od 8. Strategije rješavanja od ove djevojčice su tipičan način na koji rješavaju mnoga djeca njene dobi.

Tri različita rješenja za ova tri problema govore da, u očima djece, nisu svi zadaci zbrajanje i oduzimanja isti. Postoje važne razlike između tipova problema zbrajanja i problema oduzimanja, koji su zapravo odraz načina kako djeca razmišljaju o njihovom rješavanju. Iako je ova djevojčica koristila različite strategije za svaki problem, postoji zajednička veza koja veže strategije zajedno. U svakom rješenju je *izravno oblikovala* radnju ili vezu opisanu u problemu. Prvi problem je uključivao radnju micanja 3 od 8 te je tako modelirala problem. U drugom problemu, radnja je bila dodavanje, te je počela sa setom koji predstavlja početnu količinu te dodala predmete njoj. Treći problem je predstavljao usporedbu dvije količine, pa je djevojčica koristila strategiju za uspoređivanje dvaju setova (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson, 1999).

Djeca rješavaju ove probleme tako da "odglume" situaciju, odnosno da ju oblikuju. Izmisle postupke koji su odraz radnji i veza opisanih u problemu. Ovaj jednostavan, ali jako snažan pristup je vrlo bitan u razvijanju razumijevanja matematičkih koncepata. Djeca početno rješavaju samo one probleme koje razumiju, koje mogu predstaviti ili oblikovati koristeći fizičke predmete te koji uključuju brojeve koji su im u opsegu brojanja. Iako ovaj pristup ograničava vrste probleme u kojima su djeca uspješna, omogućuje im rješavanje značajno velikog broja problema, uključujući one s množenjem i dijeljenjem. Budući da djeca početno rješavaju probleme tako da oblikuju radnje i veze opisane u njima, važno je razlikovati različite tipove problema koje se može prikazati zbrajanjem i oduzimanjem, i unutar njih one koji su prikazani množenjem i dijeljenjem.

Jedan koristan način za klasifikaciju problema je obraćanje pažnje na dječji pristup i proučavanje radnje i veza koje su u problemu. Ovo proučavanje postupaka je dalo plod taksonomije tipova problema koji se razlikuju po metodama koja djeca koriste za njihovo rješavanje i pruža okvir za objašnjavanje teškoće problema.

Za probleme zbrajanja/oduzimanja, četiri osnovne klase problema su: *spajanje (join), razdvajanje (separate), dio – dio - cjelina (part – part - whole)* i *uspoređivanje (compare).* Veličine brojeva mogu varirati, kao i tema i kontekst problema; ali u principu, osnovna struktura sa svojim radnjama i vezama ostaje ista. Klase *spajanja* i *razdvajanja* uključuju radnju. U klasi *spajanja*, elementi se dodaju zadanom setu. U klasi *razdvajanja*, elementi se miču iz zadanog seta. U klasama *dio – dio - cjelina* i *usporedba* problemi ne uključuju radnju. Klasa *dio – dio - cjelina* uključuje veze između seta i njegova dva podseta. Problemi u svakoj klasi svi uključuju isti tip radnje o količinama ili vezama između količina. U svakoj klasi postoji nekoliko različitih tipova problema koji mogu biti prikazani oviseći koja je količina nepoznata.

Tablica 2: Aditivni koncept zadataka riječima

Klase problema			
Spajanje	(rezultat nepoznat) Iva ima 5 kuglica. Šime joj je dao još 8. Koliko kuglica ima Iva sve zajedno?	(nepoznata promjena) Iva ima 5 kuglica. Koliko joj još treba kuglica da bi imala sve zajedno 13?	(nepoznati početak) Iva ima nekoliko kuglica. Šime joj je dao još 5. Sada ih ima 13. Koliko je Iva imala kuglica na početku?
Razdvajanje	(rezultat nepoznat) Iva je imala 13 kuglica. Dala je 5 Šimi. Koliko joj je kuglica ostalo?	(nepoznata promjena) Iva je imala 13 kuglica. Dala ih je nekoliko Šimi. Sada joj je ostalo 5. Koliko je Iva kuglica dala Šimi?	(nepoznati početak) Iva je imala nekoliko kuglica. Dala ih je 5 Šimi. Sada joj je ostalo 8. Koliko je Iva imala kuglica na početku?
Dio – dio - cjelina	(nepoznata cjelina) Iva ima 5 crvenih kuglica i 8 plavih kuglica. Koliko ima kuglica?	(nepoznat dio) Iva ima 13 kuglica. 5 ih je crveno, a ostale su plave. Koliko ima plavih kuglica?	
Uspoređivanje	(nepoznata razlika) Iva ima 13 kuglica. Šime ima 5 kuglica. Koliko više kuglica ima Iva od Šime?	(nepoznata uspoređena veličina) Šime ima 5 kuglica. Iva ima 8 više kuglica nego Šime. Koliko kuglica ima Iva?	(nepoznat odnos) Iva ima 13 kuglica. Ima 5 kuglica više od Šime. Koliko kuglica ima Šime?

(Carpenter i sur. 1999)

Za množenje i dijeljenje, najjednostavniji tipovi problema su grupiranje situacija koji uključuju tri komponente: broj setova, broj u svakom setu i ukupan broj. Imamo sljedeći primjer:

Lucija ima 5 vrećica bombona. U svakoji vrećici su 3 bombona. Sve zajedno ima 15 bombona.

Tri količine u problemu su broj vrećica, broj bombona u svakoj od vrećica i ukupan broj bombona. U zadatku, svaki od tri količine može biti nepoznat. Kada je ukupan broj bombona nepoznat, problem je problem *Množenja*. Kada je broj grupa ili vrećica nepoznat, onda je to problem *Mjernog dijeljenja*. Kada je problem bombona u svakoj vrećici ili grupi nepoznat, problem je *Partitivno dijeljenje*.

Tri tipa problema: *Množenje, Mjerno dijeljenje* i *Partitivno dijeljenje,* i njihovi primjeri su prikazani u sljedećoj tablici:

Tablica 3: Tri tipa problema: Množenje, Mjerno dijeljenje i Partitivno dijeljenje

Množenje	Lucija ima 5 vrećica bombona. U svakoj vrećici su 3 bombona. Koliko ukupno bombona Lucija ima?
Mjerno dijeljenje	Lucija ima 15 bombona. U svaku vrećicu stavi 3 bombona. Koliko vrećica može napuniti?
Partitivno dijeljenje	Lucija ima 15 bombona. Stavila je bombone u 5 vrećica tako da je u svakoj jednak broj. Koliko je bombona u svakoj vrećici?

Problemi *Množenja* daju broj grupa (vrećica) i broj predmeta u svakoj grupi, a nepoznat je ukupan broj predmeta. Treba uvidjeti da dva broja predstavljaju različite stvari. Jedan broj predstavlja broj grupa (vrećica), a jedan koliko ih je u svakoj grupi (broj bombona u svakoj vrećici). Ovo razlikovanje je važno jer je odraz strategija *Oblikovanja* i *Brojanja* koje djeca koriste za rješavanje problema.

Problemi *Mjernog dijeljenja* daju ukupan broj predmeta u svakoj grupi. Broj grupa (broj vrećica) je nepoznat. U suštini, djeca koriste broj predmeta u svakoj grupi da bi izmjerili ukupan broj predmeta, odakle i naziv *Mjerno dijeljenje* dolazi.

Problemi *Partitivnog dijeljenja* daju ukupan broj predmeta i broj grupa te je broj predmeta u svakoj grupi (broj bombona u svakoj vrećici) nepoznat. Djeca partitivno podjele ukupan broj predmeta u zadani broj grupa te otuda naziv *Partitivno dijeljenje.*
Razlike između problema *Mjernog* i *Partitivnog dijeljenja* su kritične jer ih djeca u početku rješavaju na različite načine, ovisi o različitoj informaciji koja je zadana u problemu.

U sažetku, opisani su problemi koji predstavljaju množenje i dijeljenje. Tri tipa problema su povezana, ali se razlikuju u tome što je poznato, a što nepoznato. U problemu *Množenja*, cilj je pronaći ukupan broj predmeta. U problemima *Mjernog dijeljenja*, cilj je pronaći broj grupa, a u problemu *Partitivnog dijeljenja* treba se pronaći broj predmeta u svakoj grupi (Carpenter i sur. 1999).

Tijekom vremena, ovi oblici izravnog oblikovanja se zamijene učinkovitijim metodama koje su osnovane na brojanju, uzastopnom dodavanju ili oduzimanju ili dolaženje do rješenja kroz poznatu brojevnu kombinaciju (Kouba, 1989).
Zapažanje da djeca koriste različite metode za rješavanje problema koje opisuju različite situacije imaju važne učinke. S jedne strane, izravno oblikovanje radnje u problemu je jako osjetljiv pristup. A s druge strane, kako brojevi u problemu postaju sve veći, ova metoda postaje neučinkovita jer uključuje brojanje svih predmeta. Dječja vještina se postupno razvija u dva važna smjera. Jedan je taj da se kreću od korištenja različitih metoda za rješenje svakog tipa problema do razvijanja jedne opće metode koja se može koristiti za cijelu klasu problema koji imaju sličnu matematičku strukturu. Drugi smjer je prema učinkovitim proračunskim postupcima. Postupci izravnog oblikovanja se razviju u naprednije postupke brojanja opisane u sljedećem poglavlju. Za probleme riječima, ovi postupci su zapravo apstrakcije izravnog oblikovanja koje nastavljaju biti odraz radnji u problemu.
Metoda koju djeca možda budu koristili nije nužno tradicionalno poučavana metoda. Na primjer, puno djece rješava problem oduzimanja tako da broji, dodaje ili razmišlja o povezanoj kombinaciji zbrajanja jer su sve ove metode lakše i točnije nego brojanje unatrag (National Research Council, 2001).

U nastavku ćemo detaljnije objasniti dječje poimanje svih računskih operacija, prvo s jednoznamenkastim brojevima, a zatim s višeznamenkastim.

4. 3. Jednoznamenkasto zbrajanje

Djeca počinju shvaćati značenje zbrajanja u kontekstu problema riječima. Kao što smo naveli u prethodnom dijelu, djeca kreću od brojanja prema općim metodama za rješavanje različitih klasa problema. Kako se razvijaju, tako i razvijaju svaku posebnu metodu. Ove posebne metode nazivamo postupcima posebnih brojevnih metoda (National Research Council, 2001). Iako su nastavnici odavno prepoznali da djeca koriste različite postupke za rješavanje jednoznamenkastih problema zbrajanja (Brownell prema National Research Council, 2001), mnoga istraživanja iz cijelog svijeta su pokazala da se djeca kreću kroz razvoj različitih postupaka za rješavanje sume jednoznamenkastih brojeva (Fuson, prema National Research Council, 2001).

Na primjer 5 + 3. Djeca prvo izbroje sve predmete koji su prvi zadani (5), zatim one koji su drugi zadani (3), a zatim broje sve zajedno (8). Ovaj opći postupak brojanja svega postaje skraćen, internaliziran i apstraktan kako djeca imaju sve više iskustva s ovakvim zadacima. Dalje, počinju shvaćati da ne moraju brojati predmete broja koji je prvi zadan već mogu početi s brojem koji je prvi zadan ili koji je veći te samo nastaviti brojati onoliko koliki je drugi zadani broj. Kako djeca broje s predmetima, počinju sami koristiti brojevne riječi kao izbrojene predmete te pratiti koliko je riječi izbrojano koristeći prstiće ili neke sebi prepoznatljive obrasce. Brojanje postaje alat za predstavljanje. Strategije brojanja su učinkovitije i apstraktnije od oblikovanja s fizičkim objektima. U primjeni ovih strategija, dijete prepoznaje da nije nužno potrebno fizički izgraditi i izbrojati dva seta opisanih u problemu.

Djeca često koriste dvije povezane strategije brojanja za rješavanje problema *Spajanja (rezultat nepoznat)* i *Dio – dio - cjelina (nepoznata cjelina)*. S *Brojanjem od prvog*, dijete počinje brojati od prvog dodanog broja u problemu. Redoslijed završava kada je dovršen broj koraka koji predstavlja drugi dodani broj. Sljedeći primjer pokazuje ovu strategiju:

Lana ima 4 autića. Njeni prijatelji su joj dali još 7 za rođendan. Koliko autića ima sada?

Jamie broji*: "4 (pauza), 5,6,7,8,9,10,11. Ima 11 autića."* Dok broji, Jamie ispruži prstić za svaki broj. Kad je ispružio 7 prstića, prestaje brojiti i daje odgovor.

Strategija *Brojanje od većeg* je identična strategiji *Brojanje od prvog* osim što dijete počinje brojati od većeg broja od dva što su zadana. George koristi ovu strategiju da bi odgovorio na isti zadatak.

George broji: *"7 (pauza), 8,9,10,11 - 11 autića."* George također pruža svoje prstiće dok broji, ali je pokret jako blag, i vrlo je lako zanemariti njihovu upotrebu da bi došao do rezultata (Carpenter i sur. 1999).

Da bi znali kad treba prestati brojati, ove dvije strategije zahtijevaju neke metode praćenja rezultata i koraka u brojanju koji predstavljaju dodani broj. Većina djece koristi svoje prste da bi pratili rezultat. Neka djeca koriste predmete, ali znatan broj djece ne daje nikakav dokaz da fizička radnja prati njihovo brojanje. Kada se brojanje provodi usmeno, teško je odrediti kako dijete zna kada prestati brojati. Čini se da neka djeca koriste nekakvo ritmičko brojanje tako da su brojevne riječi grupirane u skupine od dvije ili tri. Ostali izričito opisuju dvostruko brojanje (npr. 6 je 1, 7 je 2, 8 je 3), ali djeca općenito imaju problem opisujući ovaj proces.

Kada se koriste prsti ili neki drugi predmeti u strategijama brojanja, oni imaju jako drugačiju ulogu nego što imaju u strategijama izravnog oblikovanja. U ovom slučaju, prsti ne predstavljaju drugi dodani broj, nego se koriste da prati broj koraka povećanih u redoslijedu broja. Kada koriste prstiće, djeca često ne broje svoje prstiće, već prepoznaju poznate uzorke prstiju i mogu odmah reći kada su ispružili određen broj prstiju.
Slična strategija se koristi za rješavanje problema *Spajanja (promjena nepoznata).* Rješenje nije broj koji se dostigne, već je odgovor broj koraka u redoslijedu. Dijete započne strategiju *Brojanja prema naprijed* s manjim zadanim brojem. Redoslijed završava s većim zadanim brojem. Prateći broj izbrojenih riječi izgovorenih u redoslijedu, dijete odredi odgovor. Ova strategija, koja se zove *Brojanje do,* je brojevna strategija *Izravnog modeliranja* analogna strategiji *Pridruživanje do*. Sljedeći primjer pokazuje strategiju *Brojanje do*:

Lana ima 8 autića. Roditelji su joj dali još nekoliko za rođendan. Onda je imala 13 autića. Koliko autića su joj roditelji dali?

Ann broji: *"8 (pauza), 9,10,11,12,13."* Ispruži prst sa svakim brojanjem dok govori redoslijed od 9 do 13. Gleda u ispružene prstiće i odgovara: *"Dali su joj 5."*

Bez brojanja, Ann je mogla prepoznati da ima 5 ispruženih prstića (Carpenter i sur. 1999).

S vremenom, djeca rastavljaju bojeve na druge brojeve (npr. 4 na 3 + 1) te koriste strategije mišljenja u kojima nepoznate kombinacije zbrajanja pretvaraju u poznate (3 + 4 postaje 3 + 3 + 1). Djeca također vrlo lako zapamte parove brojeva (npr. 2 + 2, 3 + 3). I jako ih brzo nauče.
Kroz ovaj proces učenja, određene sume odlaze u kategoriju brzog dosjećanja, i nisu više riješene na neki od načina koji je opisan. Djeca se razlikuju u sumama koje se prvih brzo dosjete, iako su dupli parovi, dodavanje jedan (zbroj je sljedeća brojevna riječ) i mali zbrojevi su najčešće oni kojih se brzo dosjete. Postoji nekoliko postupaka za rješavanje jednoznamenkastih

zadataka zbrajanja koji traju godinama; te se koriste za različite brojeve u različitim situacijama. Iskustvo s traženjem odgovora za probleme zbrajanja pruža osnovu za shvaćanje da je "5 + 3 = 8" i postupno dosjećanje sume bez neke svjesne strategije.

Djeca u mnogim zemljama često koriste ovaj razvoj postupaka, odnosno prate prirodan razvoj ugrađivanja i skraćivanja. Neki od ovih postupaka se može podučiti, i to ubrzava njihovu upotrebu (Fuson and Secada, 1986), iako izravno oblikovanje ovih strategija se mora shvatiti konceptualno, a ne samo korištenjem imitacije i ponavljanja (Resnick and Ford, 1981). Djeca također nauče opći postupak poznat kao "rastavljanje do 10". U ovom postupku 10 se dobije na način da se zbroji prvi zadani broj s drugi zadanim tako da se on rastavi da zbroj čini 10. Neki nastavnici smatraju da je ovaj pristup u grupiranju po 10 ključni temelj za kasniju višeznamenkastu aritmetiku.

Postoji mnogo različitih postupaka koje djeca koriste za rješavanje jednostavnih problema zbrajanja (Carpenter, Moser, 1984). Suočeni s tom različitošću, učitelji mogu poduzeti mnoge korake u podržavanju dječjih nastojanjima prema naprednijim postupcima. Jedan način na koji to mogu ostvariti je kroz razgovor o malo naprednijim postupcima i zašto su uspješni (Fuson, 1992a). Učitelj može potaknuti razrednu raspravu o raznim postupcima koje učenici koriste. Učenici mogu predstaviti svoje ideje i raspravljati o njima. Ostale se može ohrabriti da pokušaju koristiti ove postupke. Pomoću crtanja ili konkretnih materijala se može pokazati kako je postupak zapravo točan. Također se mogu poručiti prednosti i nedostaci različitih postupaka. Za određeni postupak, može se stvoriti problem koji bi pokazao zašto je taj postupak uspješan ili neuspješan. Drugi postupci koji mogu ohrabriti učenike za uporabu uspješnijih postupaka je korištenje velikih brojeva u problemima tako da učenici uvide neuspješnost brojevne strategije, te ih tako navesti na razmišljanje o problemu i dolaska do novog načina rješavanja.

Pružajući potporu djeci za poboljšanje njihovih postupaka, svakako ne znači da svako dijete treba koristiti sve postupke koje su razvila druga djeca. Također ne znači ni da učitelj treba podržavati i ohrabrivati svako dijete koje ima različit način rješavanja. Istraživanja su pokazala da barem jednom, većina djece koristi mali broj postupaka koje učitelji mogu uočiti i zapravo pomoći djetetu da nauči postupke koji su uspješnija (kao što je brojanje od većeg, a ne brojanje svega) (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, and Weisbeck, 1993). Pružajući probleme s riječima kao kontekst za zbrajanje i raspravu o prednostima i nedostacima različitih načina rješenja su načini na koje učenici razvijaju razumijevanje i poboljšavaju shvaćanje procesa zbrajanja.

4. 4. Jednoznamenkasto oduzimanje

Oduzimanje prati razvoj koji je uglavnom paralelan razvoju sa zbrajanjem. Neka djeca izmišljaju metode odbrojavanja koje oblikuju oduzimanje brojeva tako da odbrojavaju od ukupnog broja. Ali odbrojavanje i brojanje unatrag predstavljaju problem mnoge djece (Baroody, 1984a). Značajan broj djece izmišljaju postupke brojanja prema gore za situacije u kojima je nepoznata količina dodana poznatoj (Carpenter and Moser, 1984). Većina ove djece kasnije *broje prema gore* u situacijama oduzimanja (13 - 7 = ? postaje 7 + ? =13). Kada se nisu susreli s *brojanjem prema gore*, mnoga djeca ne izmisle ovaj način do drugog ili trećeg razreda, ako uopće i tada. Istraživanja među djecom u prvom razredu u SAD-u su im pomogla da vide situacije oduzimanja kao micanje prvih x predmeta te im je to omogućilo učenje i razumijevanje postupaka za oduzimanje kao *odbrojavanja do.* Nakon toga je njihova točnost u oduzimanju postala visoka kao i ona za zbrajanje (Fuson, 1986b).

Proučavanje rješenja na radnju u *Razdvajanju (rezultat nepoznat),* pokazano je da se koristi *brojanje unatrag*. Dijete počinje brojati od većeg broja koji je zadan te broji unatrag. Ova strategija, zvana *Odbrojavanje,* je analogna *Razdvajanju od*. *Odbrojavanje* može imati dva oblika:

Lea je imala 11 ribica. Dala je 3 Anti. Koliko joj je ribica ostalo?

Ann broji: *"11,10,9 (pauza), 8. Ostalo joj je 8."* Ann koristi svoje prstiće da bi pratila broj koraka u redoslijedu brojanja.
Bill broji: *"11 (pauza), 10 (podiže jedan prstić), 9 (podiže drugi prstić), 8 (podiže treći prstić). Ostalo joj je 8."*

Ann govori "11" dok usmeno oduzima jedanaestu ribicu, "10" dok oduzima desetu ribicu, i "9" dok oduzima devetu ribicu. Odgovor je sljedeći (četvrti) broj u naopakom redoslijedu, 8. Billovo brojanje je drugačije. Kako oduzme jedan, kaže "10", koji se odnosi na deset kojih je ostalo i onda "9" za devet kojih je ostalo. Na kraju, kaže "8" za osam kojih je ostalo kad je oduzeo treću ribicu.

Brojanje unatrag se također koristi u prikazu radnje problema *Odvajanje (promjena nepoznata).* U redoslijedu brojenja unatrag u strategiji *Odbrojavanje do* se nastavlja dok se ne dostigne manji broj; broj riječi u redoslijedu brojenja je odgovor. Primjer ove strategije, koja je poveznica sa strategijom *Odvajanje do*, je naveden:

Lea je imala 12 ribica. Nekoliko ih je dala Anti. Zatim joj je ostalo 8 ribica. Koliko ribica je dala Anti?

Ann broji: *"12 (pruža jedan prstić), 11 (pruža drugi prstić), 10 (pruža treći prstić), 9 (pruža četvrti prstić i radi pauzu), 8."* Ne treba ispružiti prstić za 8. Gleda u 4 ispružena prstića i odgovara: *"Dala mu je 4."*
Bill broji: *"12 (pauza), 11 (pruža jedan prstić), 10 (pruža drugi prstić), 9 (pruža treći prstić), 8 (pruža četvrti prstić)."* Gleda u 4 ispružena prstića i odgovara: *"Dala mu je 4"* (Carpenter i sur. 1999).

Iskustva usredotočena na veze zadataka *Dio – dio - cjelina* su također pokazala da pomažu učenicima u razvijanju učinkovitih strategija, posebno za oduzimanje (Armstrong, prema National Research Council, 2001). Učenici proučavaju situacije *Spajanja* ili *Razdvajanja*, te uočavaju brojeve koji predstavljaju cijelu količinu, a koji predstavljaju dijelove. Ova iskustva im pomažu vidjeti kako su zbrajanje i oduzimanje povezani te im to pomaže u prepoznavanju kada treba dodati, a kada oduzeti. Za djecu do drugog razreda, razumijevanje o vezama u situacijama zbrajanja i oduzimanja između dijelova i cjeline je jedno od najvažnijih postignuća u aritmetici (Resnick, 1983).

Proučavanje veza između zbrajanja i oduzimanje, te uviđanje da je oduzimanje uključivanje poznatog i nepoznatog dodanog broja je zapravo primjer prilagodljivog razmišljanja. Pružajući učenicima iskustva za razvijanje prilagodljivog razmišljanja u zbrajanju i oduzimanju, učitelji počinju uvoditi algebru jer učenici počinju shvaćati obrnute veze između dvije operacije.

4. 5. Jednoznamenkasto množenje

Puno manje istraživanja je provedeno na jednoznamenkastom množenju i dijeljenju nego na jednoznamenkastom zbrajanju i oduzimanju. Djeca prolaze kroz sličan proces razvijanja postupaka za množenje kao i onaj za zbrajanje (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Prave jednake grupe i sve ih broje. Nauče i brojati na preskoke za različite brojeve kojima množe (npr. broje 5, 10, 15, 20,… za množenje s 5). Zatim broje od i broje do koristeći prstiće da bi pratili svoj rezultat. Izmišljaju strategije razmišljanja u kojima izvode povezane rezultate iz rezultata koje znaju. Kao i kod zbrajanja i oduzimanja, djeca izmisle mnoge postupke koje im pomažu kod množenja. Pronalaze uzorke i koriste brojanje na preskoke (npr. ako množe 5 · 3, broje „3, 6, 9, 12, 15“). Pronalaženje i korištenje uzoraka, te druge strategije razmišljanja uvelike pojednostavljuje zadatak učenja tablice množenja (Thornton, 1978). Nadalje, pronalaženje i opisivanje uzoraka je sami znak matematike. Prema tome, ako se učenje množenja svodi na pronalaženje uzoraka ono i pojednostavljuje zadatak i koristi se glavna ideja matematike. Nakon što djeca prepoznaju uzorak, treba im još mnogo iskustva da bi davali brze rezultate brojanjem na preskoke.
U sljedećem primjeru vidimo kako je dijete riješilo problem množenja:

Mama je kupila 7 kutija kolačića. U svakoj kutiji su bila 4 kolačića. Koliko kolačića je mama kupila?
Carla broji jedan set od 4 kockice, zatim drugi set od 4 kockice, zatim treći, četvrti, peti, šesti i na kraju sedmi. Nakon što je završila s pravljenjem 7 grupa s 4 kockice u svakom setu, broji sve kockice i odgovara: *„28. Kupila je 28 kolačića“* (Carpenter i sur. 1999).

4. 5. 1. Strategije razmišljanja za jednoznamenkasto množenje

U jednoznamenkastoj aritmetici, postoji 100 kombinacija množenja koje učenici moraju naučiti. Komutativnost smanjuje taj broj na pola. Množenje s 0 i 1 se može brzo izvesti iz samog značenja množenja. Množenje s 2 se sastoji od duplih parova iz zbrajanja. Jednoznamenkasto množenje s 9 je pojednostavljeno uzorkom: u produktu, zbroj znamenaka je 9. (Na primjer, 9 · 5 = 45; 4 + 5 = 9). Množenje s 5 se također može izvesti kroz uzorke tako da se prvi broj koji nije 5 množi sa 10 i onda dijeli s 2 jer je 5 pola od 10 (na primjer, 4 · 5 = 20; 4 · 10 = 40 : 2 = 20 ili 7 · 5 = 35; 7· 10 = 70 : 2 = 35).

Ostalih 15 kombinacija množenja (i njihovi komutativni parovi) se mogu izračunati brojanjem na preskoke ili gradeći ih na poznatim kombinacijama. Na primjer, 3 · 6 mora biti za 6 više od 2 · 6, što je 12. Tako da je 3 · 6 = 18. Slično tome, 4 · 7 mora biti dvostruko od 2 · 7, što je 14. Tako da je 4 · 7 = 28 (primjećujemo da ove strategije zahtijevaju vještinu sa zbrajanjem). Da bi računali umnoške s 6, to se može nadograditi na znanje množenja s 5. Na primjer, 6 · 8 mora biti za 8 više od 5 · 8, što je 40. Tako da je 6 · 8 = 48. Ako su učenici vješti s takvim strategijama za množenje s 3, 4 i 6, onda još samo ostaju 3 kombinacije množenja: 7 · 7, 7 · 8 i 8 · 8. Ove kombinacije se mogu izvesti na mnoge kreativne načine (National Research Council, 2001).

4. 6. Jednoznamenkasto dijeljenje

Dijeljenje se izvodi iz situacija koje se mogu podijeliti kao što je prethodno opisano. Cijeli set se dijeli na grupe određene veličine ili na određeni broj grupa. Kao što se oduzimanje može naučiti kao veze *dio – dio - cjeline*, dijeljenje se može naučiti kao podjela brojeva na dva faktora. Stoga, dijeljenju se može pristupiti kao pronalaženju nedostajućeg faktora u množenju. Na primjer, 72 : 9 = ? se može prikazati kao 9 · ? = 72. Ali ima vrlo malo istraživanja koja se bave kako se najbolje upoznati i koristiti ovu vezu, ili da li je korisno učiti kombinaciju dijeljenja u isto vrijeme kao odgovarajuća kombinacija množenja. U sljedećem primjeru možemo vidjeti kako djevojčica rješava probleme dijeljenja:

Luka ima 12 bombona. Stavio je 3 na svaki kolačić. Na koliko kolačića je mogao staviti bombone?
U prvom razredu ima 20 djece. Učiteljica želi podijeliti razred u 4 tima s istim brojem djece u svakom timu. Koliko će djece biti u svakom timu?

Za prvi problem, djevojčica je stavila ispred sebe 12 predmeta. Zatim je stavila 3 u jednu grupu, još 3 u drugu, još 3 u treću te posljednja 3 u četvrtu grupu. Da bi došla do odgovora izbrojala je *grupe.* Za drugi problem, pred sebe je stavila 20 predmeta. Onda je podijelila predmete jedan po jedan u 4 skupine. Da bi došla do dogovora, izbrojala je broj *predmeta* u svakoj od skupina. Djevojčica je izravno oblikovala radnju opisanu u problemu. U prvom slučaju, napravila je grupe određene veličine i izbrojala grupe da bi došla do odgovora. U drugom slučaju, sa zadanim brojem je napravila grupe s istim brojem u svakoj grupi i izbrojala predmete u jednoj od njih da bi došla do odgovora. Razlike u strategijama korištene za rješavanje dva problema su odraz različitih radnji opisanih u problemu. Iako odrasli mogu prepoznati oba kao problemi dijeljenja, mala djeca u početku misle o njima u uvjetima radnje ili veza prikazanih u problemima (Carpenter i sur. 1999).

4. 7. Računanje s višeznamenkastim cijelim brojevima

Pisani postupci za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje brojeva se nazivaju algoritmi. Mogu biti učinkoviti ili neučinkoviti. Na primjer, za riješiti 47 - 5 na sljedeći način bi sadržavao neučinkovit algoritam: 47 - 1 = 46, 46 - 1 = 45, 45 - 1 = 44, 44 – 1 = 43, 43 - 1 = 42 (Jones i sur. 1994). Još jedan primjer; prvi korak u algoritmu za množenje troznamenkastog broja dvoznamenkastim je napisati troznamenkasti broj pa dvoznamenkasti, podvući horizontalnu crtu te početi množiti brojke troznamenkastog od desno prema lijevo brojkama dvoznamenkastog broja od lijevo prema desno.
Algoritmi mogu biti usmeni, pismeni ili izvršeni s pomagalom kao što je računaljka (abakus) ili kalkulator. Kroz prošlost, postojali su različiti algoritmi za računanje.

4. 7. 1. Razvoj pisanih algoritama

U davnom Babilonu, oko 2000 pr. Kr. i puno prije no što je novac bio izumljen ili načinjen papir, simboli koji su prikazivali količinu su pomagali u brojanju. Majanski sustav bilježenja korištenih simbola je pisan na način jedan ispod drugog, a ne jedan pokraj drugog kao što je bilo u mnogim drugim kulturama. Grci su izvorno koristili slova za brojeve i postupno ih spajali da bi dobili veće brojeve. Ovi veliki brojevi su bili od pomoći malom broju ljudi kao što su bili prodavači koji su računali kada su prodavali trgovinska dobra. Pismeni računski sustavi su postali prijeko potrebni kako je prodaja rasla, razmjena dobara je propala, počeo se koristiti novac i puno ljudi je trebalo točno bilježiti svoje račune. Usmeno brojanje i dostupni sustavi bilježenja nisu bili dovoljni za potrebe računa koji se pojavio. Također, opterećenje memorije je postao problem jer su se sve više počele koristiti složeniji računi.

Nisu svi sustavi s brojevima bili spremni za uporabu pisanih algoritama. Rimski sustav koristi različita slova jedan pokraj drugoga koji se usmeno dodaje i tako računa vrijednost simbola. Također su koristili i abakus.

Hindu-Arapski sustav s bazom deset, koji se koristi u zapadnoj kulturi, je uspio složene račune pojednostaviti u zapisu i prikazati kao pisani postupak. Tako je razvijen upotrebljiv pisani algoritam. Ovaj sustav koristi deset simbola, s nulom koja ima mjesnu vrijednost. Mjesto svakog simbola u svakom pisanom broju označava njegovu vrijednost, na primjer, broj tisuću sedamdeset jedan u obliku simbola bi bio 1 071, gdje 0 pokazuje da nema stotica, a 1 na krajnje lijevoj strani pokazuje jednu tisućicu, a jedinica na krajnje desnoj strani pokazuje jednu jedinicu (Jones i sur. 1994).

U našim školama skoro svi algoritmi su pismeni. Uče se kao standardni postupci kao što je prikazano u slijedećim poglavljima.

4. 7. 2. Algoritmi u upotrebi

Rezultati istraživanja od strane National Assessment of Performance Unit (APU) iz 1983. proveden u Ujedinjenom Kraljevstvu je otkrilo da je samo 55% 17 - godišnjaka uspjelo usmeno pomnožiti 90 i 70. 55% ih nije moglo usmeno izračunati 4 · 625. A skoro 40% nije uspjelo reći rezultat od 3500 : 35 i slično unutar vremenskog limita od 10 sekundi. Pitanje koje se postavlja je zašto je tako puno mladih odraslih ljudi loše u jednostavnim usmenim računima. Hope (prema Jones i sur. 1994) smatra da je rigidno nametanje pravila za pisani račun koja se uče u školi utjecalo na djecu i odrasle u njihovom izboru i sposobnosti da koriste učinkovite metode računanja. Sljedeći su primjeri računanja djeteta koje je primjenjivalo pisana pravila za jednostavne račune koji bi se mnogo brže riješili u glavi:

```
 14    360      100.00      125
- 6   - 359   -  99.95   · 1000
 08    001      000.05      000
                           000
                          000
                         125
                         125000
```

Hope je uz to otkrio i da vješti usmeni kalkulatori također koriste algoritme, ali ovo nisu standardni postupci. Oni koriste svoje znanje o brojevnom sustavu i sposobni su izumiti algoritme koji će ih dovesti do brzog i točnog rješenja.
Na primjer, dijete je računalo neke zadatke i objasnilo svoj postupak na sljedeći način:

"8 · 99. Izračunao sam 800 - 8 = 792.
25 · 480. Dakle, 25 je 100 podijeljeno na 4. Tako da sam 480 podijelio s 4 i dobio 120 i to pomnožio sa 100."

Otkriveno je i da kontekst zadatka ima snažan utjecaj na učinkovitost dječjeg računanja. Carraher et al (1985) je proveo istraživanje na grupi brazilske djece starosti 9-15 godina. Djeca su radila izvan škole prodavajući robu na uličnoj tržnici. Bili su promatrani na tržnici dok su računali na njihov uobičajeni način. Radi usporedbe također su bili testirani kako su koristili papir i olovku za rješavanje problema koji se događaju u kontekstu tržnice. Istraživači su otkrili da se problemi s ugrađenim kontekstom rješavaju puno lakše te da su izumljene usmene strategije odabrane i uspješno korištene na tržnici. Kad je korišten papir i olovka u simulaciji problema na tržnici, simboli i rutine naučene u školi su se umiješale u proces rješavanja.

Istraživanje o matematičkoj izvedbi u Ujedinjenom Kraljevstvu na grupi 11 - godišnjaka je došlo do sličnog otkrića. Samo jedna četvrtina je mogla točno odgovoriti na pitanje o mjerenju duljine koja uključuje zbrajanje razlomaka u obliku testa s papirom i olovkom. Međutim, kad im je pružen komad žice koji su mogli koristiti kao pomoć u računanju dijelova dužine, 42% je bilo uspješno. Kao u prijašnjem primjeru s tržnicom, djeca su bila puno uspješnija kada je problem predstavljen u određenoj situaciji i kad nisu koristili standardni algoritam (Jones i sur. 1994).

4. 7. 3. Standardni pisani algoritmi

Očito je da pisane računalne strategije, koje se uče kao standardne procedure u školama, nisu posebno korisne u današnjem društvu. Učitelji ne odgovaraju na dječje potrebe i prirodu svakodnevnih situacija ako nastavljaju stavljati naglasak na dječje znanje o tome i inzistiraju na vježbanju standardnih pisanih algoritama. Također postoji vjerovanje učitelja da ako djeca nauče standardni algoritam, razumjet će koncept brojeva, i da se dječja vještina s brojevima može izmjeriti s upotrebom standardnih pisanih algoritama.

Mnogi drugi razlozi podupiru argument da podučavanje standardnih algoritama ne bi više trebalo biti u matematičkom kurikulumu.

Ovo su neki snažni i uvjerljivi razlozi:

- Kad im se predstavi problem koji zahtijeva pisanu metodu, djeca moraju više misliti o tome kako odrediti postupke nego razlog za odabir korištenja tih postupaka
- Djeca provode više vremena vježbanja metoda nego razvijanje razumijevanja matematičke potrebe za rješavanje problema
- Djeca rade u izolaciji bez rasprava, prilika za dijeljenje ideja ili aktivno razvijanje njihovog razumijevanja brojeva se smatra "varanjem"
- Dobije se malo razumijevanja o brojevnom sustavu i njihovim svojstvima. Veze između brojeva se ne koriste
- Kreativno ili pronalazačko razmišljanje se ne ohrabruje ili se sprječava
- Naglasak na korištene standardne procedure pisanih algoritama otežava sposobnost stvaranja usmenih strategija
- Negativan stav o matematici se može dogoditi ako se percipira kao duge i iscrpne stranice "iznosa" - većinom primjera pisanih računanja
- Vrijeme se ne koristi učinkovito, primjeri su većinom kopirani iz udžbenika ili ploče i duge operacije kao što je zbrajanje s više brojeva
- Svakodnevne situacije imaju ograničenu upotrebu metoda s papirom i olovkom
- Razumnost rješenja se ne provjerava već samo algoritamske procedure. Čini se da djeca vjeruju da su rješenja dobivena na ovaj način točna

(Reys; Hope; Jones.; Sowder & Sowder prema Jones i sur 1994).

Svaki algoritam ima prednosti i nedostatke, stoga je potrebno razmisliti o algoritmu koji se podučava i razloge njegova podučavanja.

Učenje korištenja algoritama za računanje višeznamenkastih brojeva je važan dio razvoja fluentnosti s brojevima. Algoritmi su postupci koji se mogu izvršiti na isti način u rješavanju mnogo različitih problema s različitim situacijama i različitim brojevima. Postoji tri različita učinka ovoga. Prvo, to znači da su algoritmi korisni alati; različiti postupci se ne trebaju svaki put izmišljati za svaki novi problem. Drugo, algoritmi pokazuju značajne karakteristike matematike: građa problema se može izvući iz njegova neposredna konteksta i uvidjeti može li se drugačiji problemi riješiti na sličan način. I na kraju, proces razvoja fluentnosti s aritmetičkim algoritmima u osnovnoj školi mogu pridonijeti procesu razvijanja matematičkog mišljenja ako je vrijeme potrošeno na način istraživanja zašto su algoritmi uspješni, te uspoređivanjem njihovih prednosti i nedostataka. Takve analize mogu unaprijediti matematičko znanje kroz razumijevanje strukture samog brojevnog sustava i mjesnih vrijednosti (National Research Council, 2001).

4. 8. Algoritmi za zbrajanje

Razvoj učenika koji grade svoje vlastite postupke je na neki način sličan razvoju koji može pomoći učeniku naučiti standardni algoritam s razumijevanjem.
Sljedeći primjer iz trećeg razreda pokazuje kako fizički materijali mogu podržati razvoj strategija razmišljanja o višeznamenkastim algoritmima i jednog tipa postupaka koji je uobičajeno izmišljen od strane djece (Uttal, Scudder, DeLoache, 1997). Primjer pokazuje raspravu učeničkih rješenja za problem 54 + 48.
Ovo pokazuje da izmišljeni učenički postupci mogu biti izgrađeni kroz razvojnu apstrakciju njihovih strategija oblikovanja s blokovima. Prvo, predmeti iz problema su izravno oblikovani s blokovima. Zatim, količina koja prikazuje prvi set je zamišljena te su izbrojani samo oni blokovi koji predstavljaju drugi set. Naposljetku, izbrojane brojevne riječi su izbrojane na prstima da bi se pratio rezultat.

<u>Traženje rezultata 54+48 u trećem razredu</u>
Učenici su radili na zadatku oko 15 minuta te su podijelili svoje načine rješavanja s razredom. Učiteljica je pozvala sve da pogledaju strategiju koje je osmislila jedna djevojčica.
Djevojčica je napravila 54 i 48 s blokovima desetica i jedinica. Zbrajala je desetice (64, 74, 84,…) te pomicala blokove s 10 sa svakim brojanjem. Zatim broji kockice jedinica, pomičući kockicu sa svakim brojanjem (96,…,102). Učiteljica je uvidjela da djevojčica nije trebala napraviti blok od 54 te je uspjela riješiti zadatak bez konkretnog prikaza tog broja. Djevojčica je razredu opisala svoju strategiju na sljedeći način: „*Zamislila sam 54, i onda dodajem još 48. Idem 54, 64, 74, 84, 94.* (Podiže prstić sa svakim brojanjem da bi izbrojala četiri desetice u 48. U ovom trenutku ima podignuta 4 prstića. Zatim spušta prstiće i podiže ih sa svakim brojanjem jedinica) *95,96,97…,102*“ (Carpenter, Fennema, and Franke, 1996).

Konačno rješenje od ove djevojčice su bile namjere i svrhe verbalnog opisa što je radila s blokovima. Ali ovo je bilo više od toga. Prikazano je rješenje koje se može riješiti bez konkretnih materijala.

Postupke koje djeca sama izgrađuju su osnovani na temeljnim brojevnim konceptima te su jasno vidljivi kada se pobliže prouče koraci u njihovom rješavanju. U suprotnom s dječjim izgrađenim algoritmima, standardni algoritmi su često vrlo daleko od njihove konceptualne podloge. Razvijali su se tijekom stoljeća u svojoj učinkovitosti. Mogu se izvršiti brzo, ali može biti teško naučiti ih s razumijevanjem.
Ovo je prikaz standardnog algoritma za pisano zbrajanje:

Tablica 4: prikaz standardnog algoritma za pisano zbrajanje

S	D	J
1 + 2 **1**	8 5 **1**	6 8
4	**1** 4	**1** 4
4	4	4

"6 i 8 je 14. 4 J pišemo u stupac J. 1 D pribrajamo stupcu desetica. 8 i 5 i još 1 je 14. 4 D pišemo u stupac D. 1 S pribrajamo stupcu stotica. Zatim računamo 1 i 2 i još 1 je 4" (Paić i sur. 2013).

Učenje ovog postupka predstavlja tri poteškoće s kojima se puno učenika susreće. Prvo, računa se s desna na lijevo, suprotno od smjera čitanja i od većine metoda izmišljene od strane djece. Mnoga djeca u početku, a neka i kasnije, imaju teškoće sa zapamćivanjem računanja od desno pa prema lijevo (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter, and Fennema, 1997). Drugo, za neku djecu, pisanje malih jedinica (ili drugih brojeva) iznad ili ispod brojeva u zadatku mijenja problem (zapravo se problem i mijenja, ali ono ne mijenja rješenje). Ova promjena može biti izvor zbunjenosti. Treće, dodavanje brojeva u zadanu kolumnu je teško s ovom metodom koja se kasnije radi izvan tablice mjesnih vrijednosti i na skraćeni način. Jedinica se mora dodati gornjem broju, zapamtiti rezultat bez zapisivanja, te dodati broj koji se zapamti, a ne može ga se vidjeti, donjem broju dok se zanemaruje broj koji se vidi u gornjem redu. Ako djeca umjesto toga zbroje dva broja koja vide (puno lakša metoda), mnogo njih onda zaborave dodati onih dodatnih 10 (ili 100).

4. 9. Algoritmi za oduzimanje

Učenici mogu izgraditi postupke za oduzimanje višeznamenkastih brojeva, iako su ovi postupci često manje slični standardnim algoritmima nego što je to slučaj s algoritmima za zbrajanje. Unatoč tome, istraživanja su pokazala da učenici mogu naučiti algoritme za oduzimanje s razumijevanjem ako im se pruži prikladno iskustvo. U većini slučajeva, algoritmi za oduzimanje zahtijevaju više vremena nego algoritmi za zbrajanje, ali učenici ih mogu izvršavati točno i objasniti način na koji su izračunali (Kamii, 1989).
Algoritam koji se obično podučava je objašnjen na sljedeći način. Računa se s desna na lijevo i ima dva velika koraka u oduzimanju koji se računaju naizmjenično. Prvi korak uključuje *posudbu* ili *zamjenu* za dobivanje 10 više u gornjem retku. Drugi korak je oduzimanje nakon što je gornji broj oblikovan. Naizmjenično računanje između ova dva koraka predstavlja tri moguće poteškoće za učenike. Prva je učenje ovog izmjenjivanja i njegovi razlozi. Druga je pamćenje za izmjenu koraka. Treća je ta da izmjena navodi učenike na jako čestu grešku u oduzimanju: oduzimanje manjeg broja od većeg. U istraživanju koje smo proveli među učenicima trećeg razreda smo naišli na ovu grešku. Naime, učenici su tek sat prije počeli raditi s učiteljicom pisano zbrajanje tako da su neki učenici rješavali na pisani način. No, zadatak je bio oduzimanje s prijelazom: 93 - 69. Jedan učenik koji je rješavao na pisani način je točno napravio grupiranje, a njih šest je oduzelo 3 od 9 umjesto 9 od 13.
Standardni algoritam za oduzimanje glasi:

Tablica 5: prikaz standardnog algoritama za oduzimanje

S	D	J
4	**10** **1**	**10** **5**
-1 **1**	**2** **1**	7
2	8	8

"Od 5 J ne možemo oduzeti 7 J. Umanjeniku ćemo pribrojiti 10 J, a umanjitelju 1 D. Od 1 D ne možemo oduzeti 3 D. Umanjeniku ćemo pribrojiti 10 D, a umanjitelju 1 S" (Paić i sur. 2013).

Cilj je oblikovati gornji broj tako da je svaka gornja znamenka veća od odgovarajuće donje. Zatim je drugi veliki korak oduzimanje u svakom stupcu.

4. 10. Algoritmi za množenje

Postoji puno manje istraživanja o dječjem razumijevanju množenja višeznamenkastih brojeva nego zbrajanja i oduzimanja. Postoje neke objavljene konceptualne lekcije podučavanja množenja, te su proučene neke alternativne metode poduke (Carroll and Porter prema National Research Council, 2001). Također postoje neke studije provedene među djecom i njihovim izmišljenim algoritmima za množenje (Baek, prema National Research Council, 2001). No podaci su i dalje nedovoljni da bi se učvrstili zaključci o učeničkom razvoju učenja množenja višeznamenkastih brojeva.

Unatoč tome, korisno je proučiti učeničke algoritme koje se očekuje da će ih naučiti, te možda uvidjeti alternativu za olakšavanje razumijevanja. Standardni algoritmi za množenje i dijeljenje su složeni postupci koji zahtijevaju i zbrajanje i oduzimanje. U ovim algoritmima značenje podkoraka se žrtvuje za učinkovitost. Algoritmi koriste ravnanje mjesnih vrijednosti da bi koraci bili organizirani bez zahtijevanja od učenika da razumije što se zapravo događa s jedinicama, deseticama, stoticama, itd. Prikaz standardnog algoritma slijedi:

$$\begin{array}{r} \underline{785 \cdot 52} \\ 3925 \\ \underline{+\,1570} \\ 40820 \end{array}$$

„Govorimo:

1. $5 \cdot 5 = 25$, 5 pišemo, 2 pribrajamo
   $5 \cdot 8 = 40$, $40 + 2 = 42$, 2 pišemo, 4 pribrajamo
   $5 \cdot 7 = 35$, $35 + 4 = 39$

2. $2 \cdot 5 = 10$, 0 pišemo, 1 pribrajamo
   $2 \cdot 8 = 16$, $16 + 1 = 17$, 7 pišemo, 1 pribrajamo
   $2 \cdot 7 = 14$, $14 + 1 = 15$

3. $0 + 0 = 0$
   $5 + 7 = 12$, 2 pišemo, 1 pribrajamo

2 + 5 = 7, 7 + 1 = 8

9 + 1 = 10 , 0 pišemo, 1 pribrajamo

3 + 0 = 3 , 3 + 1 = 4“

(Paić i sur. 2013).

Množenje troznamenkastih brojeva je produžetak verzije množenja dvoznamenkastih brojeva koje zahtijeva razumijevanje o množenju stotica. Prošireni algoritam za ove velike brojeve je relativno lagan za računanje jer su potrebni koraci vidljivi. Budući da je djeci kalkulator vrlo dostupan, možda i nije toliko potrebno da djeca provode previše dragocjenog vremena u školi vježbajući množenje troznamenkastih i višeznamenkastih brojeva. No, iskustvo s velikim brojevima je vrlo važno u širenju konceptualnog znanja množenja i razvoju procjene. Obe ove vještine su važne i prilikom korištenja kalkulatora.

4. 11. Algoritmi za dijeljenje

Kao što je već navedeno, vrlo malo istraživanja je provedeno o tome kako učenici dijele i što im je prilikom dijeljenja od najveće pomoći. Neki rezultati predlažu da učenici mogu izgraditi svoj vlastiti postupak, koji su tokom vremena sve sličniji standardnom algoritmu (Lampert, 1992). Kao i kod množenja, najbolje što učitelji mogu napraviti je proučiti alternativne algoritme učenika koje razvijaju tijekom množenja s višeznamenkastim brojevima.

Standardni algoritam ima dvije stvari koje mogu učenicima zadavati poteškoće. Prvo, algoritam zahtijeva od učenika određivanje točno onoliko kopija djelitelja koliko se može oduzeti od djeljenika. Na primjer, u problemu 5841 : 67 = ?, mora se odrediti koliko se točno 67-ica može oduzeti od 5841. To određivanje nije uvijek lagano. Drugo, algoritam ne stvara nikakav smisao veličine odgovora koji se zapisuje jer se prilikom dijeljenja zapisuje jednoznamenkasti broj.

Slijedi primjer standardnog algoritma:

5428 : 23 = 236

-46

82

-69

138

-138

0

„Govorimo:

54 S : 23 približno je 2 S.

2 · 3 = 6. 2 · 2 = 4

14 – 6 = 8

5 – 5 = 0

Dopišemo 2.

82 D : 23 približno je 3 D.

3 · 3 = 9. 3 · 2 = 6

12 – 9 = 3

8 – 7 = 1

Dopišemo 8.

138 J : 23 = 6

6 · 3 = 18 (pišemo 8 J, 1 D pribrajamo D).

6 · 2 = 12. 12 + 1 = 13

8 – 8 = 0

3 – 3 = 0

1 – 1 = 0“

(Paić i sur. 2013).

Ova metoda pospješuje procjenu (kao i točnu procjenu odgovora na kalkulatoru). O njoj ćemo govoriti u sljedećem poglavlju.

5. Procjena

Procjenjivanje preciznih odgovora je još jedna vrsta računanja koja ima svoja posebna svojstva i korist u razvijanju matematičkog znanja. Ohrabrivanje učenika da procjenjuju prije rješavanja problema može poboljšati osjećaj za brojeve i razumijevanje mjesne vrijednosti što dovodi do približnog rezultata. Procjena je također praktična vještina. Može koristiti učenicima u upotrebi kalkulatora, posebno u prepoznavanju netočnih odgovora te također u matematici koja se koristi u svakodnevnom životu.

Procjenjivanje rezultata računanja je sama po sebi vrlo složena vještina. Može zahtijevati preoblikovanje brojeva, kompenzaciju pogrešaka i ponekad obnovu problema (Reys, Rybolt, Bestgen, Wyatt, 1982). Na primjer, zbroj 162 + 147 + 139 se može procijeniti preoblikovanjem (u ovom slučaju zaokruživanjem) svakog broja u 150. U ovom obliku najjednostavniji način procjene zbroja bi bilo množenje 150 s 3 i onda kompenzacijom uvidimo da je zbroj negdje manje od 450. Procjena u računanju koristi važna svojstva brojeva i sustava znakova, uključujući važnost desetica, mjesne vrijednosti i veza između različitih operacija. Također zahtijeva prepoznavanje prikladnosti procjene problema i njegova konteksta (Markovits, Sowder, 1994).

Procjena zahtijeva fleksibilnost u računanju koje naglašava rasuđivanje i strategiju, a koja je vođena razumijevanjem situacije problema i matematike unutar računa. Istraživanja procjena pokazuju kako je teško učenicima koji su podučavani na tradicionalan način, sa čestim naglaskom na rutinsko računanje s papirom i olovkom, prijeći preko računanja točnog odgovora na razumno procjenjivanje. Na primjer, jedno istraživanje (Sowder, Wheeler, 1989) je pokazalo da se mnogi učenici boje pronalaženja rezultata zaokruživanjem da bi dobili približno točno rješenje. Ovaj strah se sve više povećava od 5. do 9. razreda.

Procjenjivanje rezultata računanja je složena aktivnost koja se treba razvijati. Njena moguća korist je izgubljena ako se prema njoj ponaša kao odvojenoj vještini ili se poučava s nizom izoliranih pravila i tehnika. Reprezentacije matematičkih situacija koje učenici rade omogućavaju im jednostavne i prikladne procjene. Vještina s postupcima računanja i svjesnost onih vrsta računa koje je lako izvesti pridonose uspješnoj procjeni. Na kraju, procjena je dobar pokazatelj učeničkog rasuđivanja - u ovom slučaju, njihovo uviđanje da matematičke situacije imaju smisao te razumijevanje da procjena nije puko pogađanje već razumno i približno rješenje.

5. 1. Tipovi procjene prema Sowderu

Prema Sowderu (1992) procjena ima tri oblika: računska, mjerna i brojna.
Računska procjena se odnosi na rezultat dobiven na način odabira ili osmišljavanja strategija koji dopuštaju osobi izvođenje usmenih računa potrebnih za rješavanja problema. Studije koje proučavaju karakteristike procjenitelja su otkrile da su dobri procjenitelji promijenili brojeve na neki način da račun bude jednostavniji, često nisu koristili strategije naučene u školi, računali su s lijeva na desno te pokazali vještine osjećaja za brojeve kad su koristili različite strategije. Također su bili sigurni u svoje vještine usmenog računa i općenito nezabrinuti zbog svojih grešaka (Hope, Sherrill, 1987; Sowder, 1992).

Procjene o brojnosti se odnose na račune o broju koji su često povezani s problemima mjerenja. Tipičan primjer pogoditi koliko ima bombona u staklenci. Dobar procjenitelj će pokušati odrediti broj bombona u jednom redu pomoću procjene (npr. procijeniti broj bombona u gornjem i donjem redu), procijeniti broj redova bombona (npr. brojanjem) i onda pomnožiti ta dva broja.

5. 2. Korisnost procjene

Svjesni smo kako je približnost sastavni dio iskustava s mjerenjem koji čine veliki dio naše svakodnevne matematičke aktivnosti. Spomenuli smo da se procjena i usmeni račun isprepleću s razvojem i primjenom osjećaja za brojeve te objasnili kako osjećaj za brojeve pomaže usmenom računu.

Usiskin (1986) navodi neke primjere o korisnosti procjene u svakodnevnom životu:

- Procjena koliko se osobi plaća može "rastegnuti", odnosno koliko će trajati
- Razumijevanje je olakšano, npr. veliki brojevi se zaokruže da bi pripomogli interpretaciji raspodjeli populacije
- Računi su pojednostavljeni, npr. zaokruživanjem cijene od 5.79$ na 6.00$ da bi izračunali cijenu koliko bi 8 takvih predmeta iznosilo

- Procjena dopušta usporedbe tijekom vremena ako se te procjene računaju na dosljedan način, npr. zaokruživanje cijena goriva za procjenu potrošnje tijekom 4 tjedna.

5. 3. Vještine procjene u nastavi

Ako su procjena i usmeni račun tako korisni u toliko različitih svakodnevnim aktivnostima te doprinose razvoju osjećaja za brojeve, trebali bi se zapitati zašto iskustva koja uključuju procjenu nisu dio redovnog kurikuluma matematike. Tradicionalno gledajući, matematika se gleda kao znanost koja uvijek daje točan i precizan odgovor na svaki problem. Za napraviti procjenu treba dati različite odgovore od kojih bi svi trebali biti prihvaćeni. Ovo bi zahtijevalo promjenu u načinu podučavanja gdje je lakše označiti točna rješenja i ne slušati druge različite odgovore. Dječja očekivanja bi se trebala promijeniti i stoga bi se promijenile i njihove metode računanja jer one od prije ne bi više bili duplikati "točnih" algoritamskih postupaka.

Kao što smo već rekli, djeca se boje davanja procjena koje se koriste kao predviđanja. Ovo može biti zbog gore navedenih razloga ili zbog toga što su djeci predmeti ili događaji o kojima trebaju raditi procjene nepoznanica.

Sowder (prema Jones i sur. 1994) navodi da se ljudske sposobnosti procjene razvijaju kroz iskustvo i zrelost. Govori da kada usmeni račun koji uključuje procjenu postaje jako složen proces iz kojeg proizlazi rješenje. Vještine i strategije koje uključuju procjenu su vrlo raznolike zbog mnogih različitih situacija u kojima se koriste. Prema Sowderu, njihova uspješna uporaba može ovisiti o dječjim svakodnevnim i brojevnim iskustvima kao i o njihovom kognitivnom razvoju. Također je potrebna i dobra organizacija kratkotrajne memorije. Ako djeca trebaju imati sve ove vještine i sposobnosti za biti dobar procjenitelj, nije ni čudo da se zadatak podučavanja procjene čini kao pretežak i izvan opsega sposobnosti mnoge djece osnovnoškolskog uzrasta.

Sljedeći razlog za isključenje aktivnosti procjene iz matematičkog programa je da učitelji nisu sigurni kako ocijeniti vještine u procjeni. Ako učitelji smatraju ovo teškim ili ako postoji nekoliko smjernica za pomoći djeci u podučavanju procjene onda je mala vjerojatnost da će obratiti pozornost na ovaj aspekt matematike.

Nedavne izjave i kurikulumski dokumenti u Australiji i inozemstvu su pokušali ukazati na ove poteškoće objašnjavajući zašto su procjena i usmeni račun važni u učenju matematike.

Carroll (prema Jones i sur. 1994) navodi neke od razloga:

- Učinkovitost
- Pruža uvid u učeničko razmišljanje i razumijevanje
- Potiče pronicljivost prije računa
- Promiče upotrebu osnovnih matematičkih svojstava
- Upotreba vizualnih matematičkih vještina
- Razvija matematičko rasuđivanje
- Stimulira, potiče i nagrađuje istraživanje uzoraka

Zanimljivo je kako su neke studije pokazale razliku u vještini procjene između dječaka i djevojčica. O toj temi ćemo se osvrnuti u sljedećem poglavlju.

6. Dječaci i djevojčice u računanju

Razlike među dječacima i djevojčicama u uspješnosti rješavanja matematičkih zadataka su predmet brojnih istraživanja. U ovom poglavlju ćemo navesti neka i njihove zaključke.

Postoje starija istraživanja (Maccoby i Jacklin prema Vizek-Vidović i sur. 2014) koja su pronašla opće razlike u korist muških ispitanika. No, noviji radovi govore da smjer razlika ovisi o dobi ispitanika i vrsti primijenjenih zadataka (Marshall i Smith prema Vizek-Vidović i sur. 2014).

Hyde i suradnice (1990) su provele meta-analizu na 100 radova koji su objavljeni od 1963. do 1989. te pokazali da razlike nema ukoliko se vrsta zadatka i dob ispitanika zanemare. "Međutim ukoliko se ovi činitelji istodobno uzmu u obzir, djevojčice su nešto uspješnije u računanju na osnovnoškolskom uzrastu, a srednjoškolci, studenti i odrasli muški ispitanici uspješniji su u rješavanju problemskih matematičkih zadataka od ispitanica odgovarajućeg uzrasta. Niti na jednom uzrastu nema razlika među rodovima u razumijevanju matematičkih pojmova" (Vizek-Vidović i sur. 2014).

Rezultati istraživanja spolnih razlika u procjeni računanja (Rubenstein, 1985) govore da je općenito vještina procjene u računanju viša kod dječaka nego kod djevojčica, ali također znatno niska.

Rezultati ispita usmenog računa koje je proveo McIntosh i sur. (1995) je pokazao sljedeće razlike između spolova. Dječaci su značajno bolje izvršili zadatke nego djevojčice u 5. i 9. razredu. Ipak, razlika je samo u tri računa (od 30) u 5. razredu i samo u dva (od 40) u 9. razredu. Izvedbe u 3. i 5. razredu su normalno raspoređene. Međutim, izvedbe u 7. i 9. razredu su ukošene zbog lakših i/ili vrhunca sposobnosti usmenog računa. Porast u izvedbama kroz godine je mnogo veći od 3. do 5. razreda nego od 7. do 9.

Meta-analitička istraživanja u novije vrijeme govore kako postoje činitelji koji mnogo više od spola utječu na rezultate u matematičkim zadacima. To mogu biti kurikulum, etnička pripadnost ili način poučavanja (Lindberg, Hyde, Petersen, Lynn prema Vizek-Vidović i sur. 2014).

Spomenuvši način poučavanja, vidimo koju ulogu ima sam učitelj u dječjem razvoju matematičkih vještina. U sljedećem poglavlju ćemo se osvrnuti na rad učitelja, njegovu ulogu i strategije poučavanja koje koristi.

7. Suvremeni učitelj

Suvremeni edukator je osoba koja u sobi sadrži pregršt ideja i misli, koja je sposobna voditi malu zajednicu, ima ono nešto u sebi čime promatra i otkriva dječji talent u nekom području. Ta osoba treba stalno raditi na sebi, na svome radu, koristiti inovativne pristupe podučavanja, preoblikovati stare načine koji se ne pokazuju uspješnima. Treba puno ulagati u sebe, sebe kao osobu i sebe kao učitelja. Osoba stvorena za učitelja ima u sebi želju za učenjem, istraživanjem, vođena je znatiželjom. Cijeni djecu, učenike, njihove potrebe i individualnost svakoga od njih. Takav edukator treba biti, ne samo za ubuduće, nego i za sada. "Postojeći edukator se mora promijeniti, najprije iznutra prema vani. Njemu treba pomoći da postane ono što treba biti: intelektualac, a ne fizikalac, umjetnik, a ne rutiner koji čitavi radni vijek provodi u ponavljanju istog načina rada s djecom ili učenicima" (Stevanović, 2003).

Kreativno mišljenje, njegovo poticanje, ohrabrivanje te nastava koja je prožeta njime je novi način na koji osoba dolazi do otkrića, izuma, istraživanja. Ono u sebi sadrži znanja, ali i puno više. Ono treba uključivati osjećaje, empatiju, suradnju, prijateljstvo. Djecu u školi učitelj treba pripremati za novo, nepoznato, a to se ne može postići samo suhoparnim činjenicama. To je zanimanje kojim učitelji aktiviraju dječji um. "Djeca trebaju naučiti misliti, pronalaziti, stvarati, predlagati alternative, tražiti različite putove za slične ciljeve i rješavati probleme. To je koncept samostalnosti, tolerancije i akcije u individualnim i grupnim aktivnostima" (Stevanović, 2003).

Okolina koja potiče; obitelj, vrtić, škole, sve razvijaju dječje stvaralaštvo i njihov potencijal. Odrastajući u takvoj okolini dijete se osjeća sigurno, voljeno i željno znanja. A to vodi uspješnoj suradnji sa drugom djecom, učiteljem i ostalim osobama s kojima je dijete u interakciji. Učitelj je osoba čija je odgovornost stvoriti takvu atmosferu u svom razredu. Aktivnosti koje izabire učitelj trebaju poticati originalnost i kreativnost kod djece. "Učitelj pitanjima i selektivnim aktivnostima izaziva znatiželju, radoznalost, istraživanje i manipuliranje idejama i materijalima. Istražuju se različiti putovi dječjeg mišljenja i biraju strategije poučavanja u kreativnom mišljenju. Snaga proizvodnje ideja je jača nego jednostavna potrošnja znanja" (Stevanović, 2003). Učitelj svojim poučavanjem treba zadovoljiti individualne potrebe i interese svojih učenika, poticati fleksibilno rješavanje problema, te pokazati minimum važnosti prema greškama. Pogreške su sastavni dio učenja, one su potrebne i očekivane.

Osnovna uloga učitelja se promijenila. Cilj nastave više nije samo prenošenje gotovih znanja. To je nešto puno više. Učitelj je usmjeren na nastavu, njenu organizaciju, ali i na učenika, na njegovo znanje, osjećaje, misli i potrebe. Učitelj je osoba koja zna što želi postići nastavom i na koji način. Pritom ima u vidu sve razlike među pojedincima, okolnosti u kojima se odvija nastava, posebnosti nastavnog sadržaja… Također je svjestan da bit nastave nije samo u obrazovanju već i u odgoju.

Kada bi sada osoba pomislila na svog omiljenog nastavnika ili učitelja te se zapitali zašto im je baš on ostao u takvom sjećanju, zaključili bi da su to prije svega zapravo bili ljudi. Odrasle osobe koje su nas razumjele, davali potporu našim razvojnim mogućnostima, oslonac u teškim situacijama, usadili nam osjećaj vrijednosti i poštovanja. Vidimo i sami da je biti učitelj težak, ali predivan zadatak. Biti učitelj ljudi postižu na različite načine i neki su dobri učitelji ili nastavnici iz potpuno različitih razloga. U ovome poslu, u orijentaciji na učenika, nastavu, odgoj, svatko od nas će tražiti nešto svoje, svoj identitet ili pečat kojim će ga činiti onakvim učiteljem kakav je i kakav želi biti. Austrijski pisac A. Stifter je rekao: "Nastava je lakša od odgoja. Za nastavu treba znati nešto, a za odgoj treba biti netko" (Jelavić, 2008).
No, kako je nastava prožeta odgojem, zaključujemo da osoba koja želi i hoće biti učitelj, mora mnogo znati, ali i biti netko. Tek tada taj netko ima sposobnost poticanja moralne i intelektualne autonomije svojih učenika. "Od nastavnika se prema tome traži da ovlada svojom ulogom, da osvještava svoje (nastavno) ponašanje (u organizaciji nastave, ocjenjivanju, načinu komuniciranja, korištenju i izboru izvora…) s ciljem da u nastavno događanje unese više onih elemenata koji uvažavaju izvorne potrebe učenika (vjerodostojnost učenja/nastave), koji sužavaju prostor svemu onome što ograničavajuće djeluje na njihove stvaralačke potrebe i mogućnosti" (Jelavić, 2008).

Ovakav pristup učitelja mu omogućuje nova znanja i iskustva te poticanje i traženje novih i različitih načina podučavanja. Jer konstantno ponavljanje istog ponašanja i načina podučavanja predstavlja opasnost za vjerodostojnost učitelja i stavlja ga u poziciju dekvalifikacije. I zato učitelj mora stalno ulagati u sebe, u svoja znanja, u svoje materijale i u svoje učenike.

7. 1. Učitelji u školama Republike Hrvatske

U ovom dijelu ćemo prikazati mišljenja i stavove šest učiteljica zadarskih škola koje smo intervjuirali. Svima su bila postavljena ista pitanja. Pitanja su bila usmjerena na strategije poučavanja. Prvo pitanje je glasilo:

1. Kako poučavate učenike računanju? Dakle, prije pisanog računa, na koji način učenici zbrajaju, oduzimaju, množe i dijele? Koje strategije ste koristili pri poučavanju? Kako poučavate pisani račun?

Različite metode poučavanja se koriste u različitim razredima.

U prvom razredu se djecu upoznaje s brojem, količinom, računskom radnjom. Najčešće se koriste konkretni materijali; prstići, štapići, kuglice, geometrijski likovi, kutijice, dakle zorni prikaz.
„Kad krenem od malih prvaša onda, što mi je najbitnije, krenem od zornog prikaza, dakle koristim što više raznoraznih materijala, od geometrijskih tijela, od likova, od kojekakvih konopa, konopčića kad radimo crte, od kutija, od otvorenih - zatvorenih, znači taj dio matematike: odnosi među predmetima, veličine, veći, manji, jednaki, koristim najčešće praktičnu nastavu. Zatim viši-niži, njih poredam tko je viši, tko je niži, jako je bitno da učenik vizualizira, ono što gleda kroz brojku. Odnosno taj pojam broja, količine, međusobnih odnosa brojeva, to pokazujem na taj način. Onda naravno proporcionalno kako rastu oni, kako matematički sazrijevaju, tako uvodim i manje tih igara, prelazimo na nekakvu konkretnu matematiku“ (Učiteljica 3).
Također se koristi i brojevna crta. Kako nauče broj, djeca ih smještaju na brojevnu crtu, određuju im položaj. Kasnije računaju pomoću nje, služe se prstima, lukovima, a tokom vremena dosegnu i automatizam. Računanje preko desetica rade pomoću rastavljanja brojeva. Puno učiteljica govori da svako dijete radi na svoj logičan način.
U višim razredima, veći su brojevi te slijede i drugačije strategije. Koristi se rastavljanje brojeva, npr. *„broj 125 · 6, rastavimo na 100 · 6 + 20 · 6 + 5 · 6. Na takav način oni to puno lakše i puno brže shvate“* (Učiteljica 1).

Također je vrlo važno i ozračje u razredu, na učitelju je da kreira atmosferu prožetu znanjem i oslobođenu straha od pogreške.

„Ono što inzistiram u radu matematike je da učenici rade naravno matematiku sa razumijevanjem, dosta izvodim učenike pred ploču i ono "po starinski" tražim da mi govore što rade. Znači, da svaki korak kojeg rade, da oni govore i da ja zapravo na taj način čujem, vidim, da li zapravo dijete razumije ili je ono samo automatiziralo neko svoje znanje, kao recimo tablicu množenja koju, često puta znamo svi, automatiziraju, a teško je onda primijeniti u nekom brojevnom izrazu u praksi. Metode u matematici koristim više, ovisno o naravnu tipu zadatka; da li su to brojevni izrazi, zadaci riječima, problemski zadaci, mozgalice, to je široko područje" (Učiteljica 3).

Učiteljice pripremaju učenike za pisani račun tako da prije pisanog razvijaju usmeni račun, što je odlična vježba za izgradnju osjećaja za brojeve.

„Prije pisanog računa imamo usmeno računanje, mada je to prije bilo u udžbenicima, sad ne toliko, ali znam to raditi s njima. Na primjer 320 + 500, po stoticama, pa deseticama, na kraju jedinicama. Nastojim da malo razvijaju mozak jer im je previše tih informacija sa strane… Krenemo uvijek od jednostavnijeg. Nekad imam učenike koji to već znaju. Dam na primjer računsku priču da vidim tko mi to već zna, ili pokušavaju to sami riješiti, analiziramo je li dobro ili nije. Usmeno također nastojim dosta raditi s njima. Sada smo na višeznamenkastim brojevima, pa zadam broj 13 526, koji je za 100 veći. Onda oni zapravo vide da znamenku stotica povećavaju za 1, ili manji za 300, umanjuju za 3 i slično. Oni to znaju. Ali kad im kažeš 15 320 - 300, onda stanu. Tako da ih na taj način uvježbavam" (Učiteljica 6).

Prijelaz na pisano računanje može nekim učenicima predstavljati problem jer ima puno koraka na koje se mora paziti.

„Pisano oduzimanje je teže jer mora puno radnji popratiti s takvim svojim načinom oduzimanja. Oni mogu oduzeti točno, ali kad ima šesteroznamenkasti broj; ako se i dalje drže nekog načina pobrkati će im se broj, mora dodati gore 10, pa ga oduzeti na svoj način, pa se sjetiti dodati umanjitelju jednu deseticu, tako da se mogu zbuniti. Ali uglavnom svi oni nađu nekakav svoj način i model, ali uz puno, puno konkreta, što god njima odgovara. Najuspješnija su djeca koja uspiju vizualno percipirati broj" (Učiteljica 5).

Sljedeće pitanje je glasilo:

2. Jeste li naišli na učenike koji imaju neki svoj poseban način računanja? Jeste li ih usmjeravali na način da ih ohrabrujete u tome da ga i dalje koriste i razvijaju?

Kao što je već spomenuto, svaka osoba računa na sebi svojstven i logičan način. Vrlo je zanimljivo vidjeti različite načine na koje učenici dolaze do rješenja. Sve učiteljice ohrabruju i potiču različite pristupe računanju, dapače drago im je, a ponešto i nauče.

„Sjećam se jednog dječaka koji je rješavao na jedan poseban način. 81 - 34. 4 – 1 = 3 i onda 80 – 30 – 3 = 47. Tada sam bila još početnik, i bilo mi je jako zanimljivo što me on naučio jedan novi način koji ja nisam znala. Ja čak i volim da dolaze na svoj način računanja“ (Učiteljica 6).

Naravno, potiču njihov način, ali ih upozoravaju na točnost i pravilnost matematike.

„Bez obzira što matematika ima neke svoje uhodane korake, ali neke stvari treba forsirati, potencirati, ali negdje treba kao i u svakom području dati učeniku i tu neku slobodu i u matematici i da učenik, ako je on došao do rješenja nekom svojom logikom“ (Učiteljica 3).

„Ako on ima svoj put da dođe do rješenja, to je u redu, dokle god je točno rješenje. Ako vidim da on tako funkcionira, da je to njegov način koji je lakši, zašto ne. I točan naravno, to je prvenstveno“ (Učiteljica 4).

„Uvijek im kažem da nađu neki svoj način, bitno je da dođu do rješenja. Hoće li doći ravno, ili okolo naokolo pa doći do njega, ja to potičem jer naši mozgovi drugačije rade“ (Učiteljica 6).

Učiteljice uočavaju da je ovakav pristup razvijanju osjećaja za brojeve dobar pokazatelj kasnije uspješnosti u matematici.

„Potičem ih da na takav način dokle god su uspješni znači da je to ispravno, da takav način na koji rade, da tako nastave i dalje. Uglavnom su to učenici koji imaju baš dobro razvijeno matematičko mišljenje i kasnije se pokaže, krajem trećeg, početkom četvrtog da im je matematika nekakva jača strana“ (Učiteljica 1).

„Naročito tamo u trećem i četvrtom razredu se može to itekako dobiti, to uvažavam i to bodujem ako je to nešto za ocjenu, za bod, tome svakako dajem nekakav bod“ (Učiteljica 3).

Sljedeće pitanje je bilo:

3. Pratite li strategije računanja iz udžbenika ili imate svoj način rada?

Ovo pitanje je postavljeno u svrhu dobivanja uvida u kojoj mjeri otprilike učiteljice koriste udžbenik na nastavi. U kasnijoj analizi ćemo vidjeti i detaljniji osvrt učitelja na udžbenik. Učiteljice uglavnom koriste udžbenik kao smjernicu, ali ga se slijepo ne drže.

„Pa koristim se udžbenicima, priručnicima i trudim se održati nekakav redoslijed kao što je u udžbeniku. Pratim plan i program sve kako ide.“ (Učiteljica 1)

„Kombiniram. Udžbenik mi nije ono što bi rekli "sveto pismo". Moram reći da mi godine mog iskustva, 33, bilo bi žalosno da se držim strogo udžbenika. Udžbenik mi je jedan putokaz da znam gdje sam sa sadržajem, sa gradivom, pratim moj mjesečni program koji moram pratiti i kojeg naravno poštujem, uvažavam, ali imam i svoje zadatke“ (Učiteljica 3).

Iz iskustva već znaju da li su učenici shvatili nastavnu jedinicu predviđenu udžbenikom, ali same odrede koliko dugo će ju obrađivati, tako da dosta kombiniraju svoje materijale i udžbenik.

"Rijetko kad nešto preskačem, iako se ne zadržavam na svakom dijelu možda onoliko koliko je to predviđeno priručnikom nego u praksi vidim što im je teže, gdje zapinju i s tim se bavim duže, neovisno o tome koliko je to planirano. Dakle, ne mičem se sa nekog sadržaja koji je predviđen udžbenikom možda jedan sat, ja se možda ne mičem 5, 6, 7 sati, koliko god treba dok ne vidim da su učenici savladali" (Učiteljica 1).

"Zaključak: udžbenik da, ono što je ponuđeno u udžbeniku da, ali moj prostor za moju matematiku i za moje zadatke također da. Tako da kombiniram" (Učiteljica 3).

"Nekad da, nekad ne. S obzirom da imam praksu već onda ja već shvaćam na koji način je njima najbolje i najlakše. Također pustim njih da odaberu svoj način, hoće li udžbenik, hoće li moj, ili naći neki svoj način, tako da kombiniram" (Učiteljica 6).

"Dogodi se da je drugačije objašnjeno, ili po meni nedovoljno dugo objašnjeno, pa ja to malo više s njima radim. Na primjer pisano oduzimanje, ono se temelji na stalnosti razlike. Prije toga to je spomenuto negdje u udžbeniku, površno, ali oni to moraju pojmiti" (Učiteljica 5).

Posljednje pitanje je glasilo:

4. Vježbate li s učenicima usmene strategije računa koje bi im bile korisne u svakodnevnom životu, npr. u trgovini?

Nakon detaljne obrade važnosti osjećaja za brojeve, usmenog računa i razvijanju procjene, ovdje se željelo vidjeti da li učiteljice razvijaju to kod svojih učenika i na koji način. Sve intervjuirane učiteljice dosta rade s učenicima i time povezuju školsko znanje sa svakodnevnim situacijama, što je i cilj ovakvog pristupa računanju.

Učiteljice im to prikažu kao igru; pojednostave situaciju da bude na razini djeteta.

"*U prvom i drugom razredu smo se najviše bavili tim matematičkim igrama, onda su vidjeli, na primjer u trgovini, baš smo se igrali trgovine, prodaje, kupnje, to im je bilo zabavno, i kroz matematičke priče isto tako vide da ako ne znaju matematiku jednostavno ne mogu neke stvari u životu koristiti i izračunati"* (Učiteljica 2).

"Neki dan smo razgovarali konkretno o kreditima. Što su to krediti i što su to kamate. Baš smo tako htjeli, na neki njima jasan način, pojmove prvo objasniti. Ali djeca dolaze iz obitelji gdje imaju kredit. Ne znam postoji li neka obitelj koja nema kredit i da ne plaća kamate. Tako da im je to sve bilo teoretski jasno. Onda smo to morali malo pojednostaviti, da ja to njima približim, što to je. Često imamo priče iz trgovina, što je isto djeci dosta blisko" (Učiteljica 3).

"Također sam radila s njima, kako imamo one kartončiće sa novčanicama, znala sam i na sat donositi prave kovanice dok su to manji brojevi, jer njima je ipak kad su kune u pitanju… Ono što mi je vrlo zanimljivo, kad su računi u pitanju, zbrajanje manjih brojeva; jesam li samo spomenula da su to kune, a ne cvjetovi, ne bomboni, čim su kune, samo se čuju ti kotačići, to računanje kreće. Dakle kad su u pitanju kune, svi znaju računati, a bilo koji drugi primjer… ključna riječ je kune" (Učiteljica 4).

Jedna učiteljica potiče i drugačiji pristup računanju; pomoću japanske računaljke abakus sorobaru što je djeci jako zanimljivo.

" Ja još radim matematiku pomoću japanske računaljke abakus. Uvela sam to prošle godine u školu. I moji učenici su druga godina računanja na abakus sorobaru. Ove godine su se kolegice učiteljice zainteresirale pa upravo i njih obučavamo da i one krenu tako da je to isto jedan jako koristan način učenja matematike. Dakle, na toj maloj spravici, naoko igrački, ali zapravo jako moćnoj abakus sorobar u Bartulu Kašiću. Tako da svašta radimo" (Učiteljica 3).

Učiteljice su vrlo rado pristupile intervjuu te im nije bio nikakav problem dati nam uvid u svoju nastavu. Kroz razgovor s njima saznajemo način poučavanja svake učiteljice. Možemo vidjeti da učiteljice s učenicima rade postupno, od poznatog ka nepoznatom, odnosno od konkretnog ka apstraktnom. Djecu u prvom razredu upoznaju s matematikom kroz igru, kroz konkretne i opipljive predmete, a kako rastu nastava matematike se sve više okreće većim brojevima i složenijim zadacima. Što se tiče načina računanja kod djece, učiteljice to puno ohrabruju i potiču što je izvrstan pokazatelj kreativne nastave prožete individualnošću svakog pojedinog djeteta. Učiteljice inzistiraju na vlastitim načinom rješenja svakog učenika, ali uz jako bitne stavke – točnost i pravilnost prirode matematike. Iz odgovora na pitanje koje se odnosi na strategije računanja iz udžbenika vidimo da učiteljice svojim iskustvom ipak znaju najbolje. Dakle, same procjene kvalitetu obrade nastavne jedinice ispred sebe, a potom ju oblikuju na odgovarajući način svojim učenicima. U nekoj mjeri one koriste udžbenik na nastavi, ali obradu prilagode koristeći se vlastitim metodama čak i zadacima. Dakle, najčešće kombiniraju udžbenik s vlastitim materijalima što djeci daje priliku okušati se u novom i možda ne toliko poznatom sadržaju. To učenicima predstavlja izazov pa upravo tu vidimo samu bit matematike, a to je logično razmišljanje i odgovarajuća primjena naučenog. Ovakvim načinom rada, učiteljice s učenicima ujedno razvijaju usmene strategije računa koje su im svakako korisne u svakodnevnom životu. Kreće se, naravno, od materijala prilagođenom djetetu te kroz rast i razvoj dijete uviđa koje mu sposobnosti i vještine uspješno razumijevanje matematike daje, kako sada, tako i u budućnosti.

U sljedećem poglavlju slijedi kvantitativna obrada podataka istraživanja.

8. Metodologija istraživanja

Provedeno istraživanje sastoji se od dva dijela. U prvom dijelu istraživanja željelo se istražiti koje sve strategije koriste učenici nižih razreda osnovne škole (3., 4., i 5.) prilikom različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje te različite kombinacije istih). Osim toga, željelo se istražiti koliko su učenici točni u procjenjivanju točnog odgovora pri različitim računskim operacijama.

U drugom dijelu istraživanja anketom su ispitani čestina i način korištenja dva udžbenika iz matematike (*Matematičkim stazama* i *Moj sretni broj*) tijekom nastave matematike u nižim razredima (1., 2., 3. i 4.) osnovne škole na području grada Zadra (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića) te percepcija o navedenim udžbenicima od strane 12 učitelja/ica razredne nastave. Uz to su provedeni intervjui na šest učiteljica 3. i 4. razreda radi dobivanja detaljnijeg odgovora.

8.1. Cilj istraživanja

Utvrditi koje sve strategije računanja (uz čestinu i točnost) koriste učenici nižih razreda osnovne škole pri računanju različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih), razlike s obzirom na školu i spol u točnosti rješavanja zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) koristeći različite strategije računanja, razlike s obzirom na spol u točnosti procjenjivanja točnog odgovora zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje i množenje) te dobiti uvid u korištenje udžbenika iz matematike prilikom organiziranja i podučavanje nastave iz matematike i percepciju o korištenim udžbenicima od strane učitelja.

8.2. Problemi i hipoteze

PROBLEM 1: Ispitati koje sve strategije računanja za rješavanje zadataka različitih računskih operacija (čestinu strategije i točnost odgovora) (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) koriste učenici nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića.

HIPOTEZA 1: S obzirom na prethodna istraživanja (Pavlin-Bernardić, 2006) kojim je utvrđeno kako se različite strategije rješavanja zadataka javljaju kod različite djece iste dobi pri rješavanju istog zadatka te kod istog djeteta pri rješavanju sličnih zadataka, očekuje se različita točnost i čestina strategija za rješavanja zadataka računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i njihove kombinacije) kod učenika nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića.

PROBLEM 2: Ispitati razlike (s obzirom na školu i spol) u točnosti rješavanja zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) koristeći različite strategije računanja kod učenika nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića.

HIPOTEZA 2: S obzirom na rezultate prethodnih istraživanja (McIntosh, Bana i Farrell, 2011) očekuje se da će dječaci uspješnije koristiti različite strategije računanja od djevojčica pri zadacima različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) tj. da će imati viši prosjek točnosti riješenosti te se s obzirom na usklađenost Nacionalnog kurikuluma za nastavni predmet matematike ne očekuje razlika u točnosti rješavanja zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) koristeći različite strategije računanja kod učenika nižih razreda s obzirom na pripadnost pojedinoj školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića).

PROBLEM 3: Ispitati razlike s obzirom na spol u točnosti procjenjivanja točnog odgovora zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje i množenje) kod učenika nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića.

HIPOTEZA 3: S obzirom na rezultate prethodnih istraživanja (Rubenstein, 1985) očekuje se da će dječaci uspješnije procjenjivati točne odgovore od djevojčica pri zadacima različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje i množenje) tj. da će imati viši prosjek točnosti procjenjivanja točnog odgovora.

PROBLEM 4: Steći uvid u korištenje udžbenika za nastavu matematike prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike te u percepciju o navedenim udžbenicima od strane učitelja/ica razredne nastave obiju škola.

HIPOTEZA 4: S obzirom na rezultate prethodnih istraživanja (Glasnović Gracin i Domović, 2009) očekuje se da se većina učitelja/ica razredne nastave vodi propisanim sadržajem i planom korištenog udžbenika za nastavu matematike prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike.

8.3. Instrumentarij istraživanja i uzorak

U svrhu ispitivanja strategija računanja za rješavanje zadataka različitih računskih operacija, razlika (s obzirom na školu i spol) u točnosti rješavanja zadataka različitih računskih operacija korištenjem različitih strategija računanja te razlika s obzirom na spol u točnosti procjenjivanja točnog odgovora zadataka različitih računskih operacija provedeno je istraživanje u listopadu 2018. godine na uzorku od 214 učenika od čega je 104 učenik (48,60%) i 110 učenica (51,40%). Sudionici su bili učenici 3., 4. i 5. razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića. U istraživanje nije uključeno 9 učenika 3. razreda, 11 učenika 4. razreda i 8 učenika 5. razreda jer jedan učenik 3. razreda pohađa nastavu po individualnom programu, a ostali navedeni učenici nisu riješili jedan ili više zadataka. U svrhu ispitivanja Problema 1 i Problema 2 zadaci su nasumično odabrani iz udžbenika *Matematičkim stazama* i *Moj sretni broj* dok su u svrhu ispitivanja Problema 3 zadaci odabrani iz rada *Computational estimation and related mathematical skills* (Rubenstein, 1985) s tim da su promijenjene znamenke za oba tipa zadataka.

U svrhu stjecanja uvida u korištenje udžbenika (*Matematičkim stazama* i *Moj sretni broj*) prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike te percepcija o navedenim udžbenicima od strane učitelja provedeno je anketiranje 12 učitelja/ica razredne nastave kroz listopad i studeni 2018. godine. Uzorak od 12 učitelja/ica činili su 4 učitelja/ice razredne nastave iz OŠ Krune Krstića koji se prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike koriste udžbenikom *Moj sretni broj* te 8 učitelja/ica razredne nastave iz OŠ Bartula Kašića koji se prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*. Provedena je modificirana verzija ankete koja se sastoji od 16 tvrdnji od čega se 10 tvrdnji odnosi na stjecanje uvida u korištenje udžbenika (*Matematičkim stazama* i *Moj sretni broj*) prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike, a 6 tvrdnji na percepciju učitelja/ica o navedenim udžbenicima. Percepcija učitelja/ica razredne nastave mjerena je procjenjivanjem svake pojedine tvrdnje na modificiranoj skali od 4 stupnja (1 - nikad, 2 - rijetko, 3 - često, 4 - gotovo uvijek). Uz navedeno, provedeni su intervjui koji sadrže 4 pitanja na 6 učiteljica 3. i 4. razreda radi dobivanja detaljnijeg odgovora.

8.4. Rezultati

U nastavku su prikazani prosječni rezultati, raspršenja i raspon rezultata točnosti odgovora unutar pojedinih zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) na ukupnom uzorku unutar pojedinog razreda (3., 4. i 5.) te s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića).

Tablica 6: Tablični prikaz aritmetičkih sredina (M), standardnih devijacija (SD), medijana (C), moda (D) te raspona rezultata (min i max) točnosti odgovora unutar pojedinih zadataka različitih računskih operacija na ukupnom uzorku 3. razreda s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića)

UZORAK	ZADATAK	M	SD	C	D	min	max
UU	46+14	0,96	0,21	1	1	0	1
UU	20+35	0,97	0,17	1	1	0	1
UU	76-25	0,91	0,29	1	1	0	1
UU	93-69	0,65	0,48	1	1	0	1
UU	12+25+8+5	0,94	0,24	1	1	0	1
UU	(52+29):9	0,97	0,17	1	1	0	1
UU	(86-23):7	0,88	0,32	1	1	0	1
KK	46+14	0,96	0,19	1	1	0	1
KK	20+35	0,96	0,19	1	1	0	1
KK	76-25	0,82	0,39	1	1	0	1
KK	93-69	0,54	0,51	1	1	0	1
KK	12+25+8+5	0,96	0,19	1	1	0	1
KK	(52+29):9	1	0	1	1	0	1
KK	(86-23):7	0,86	0,36	1	1	0	1
BK	46+14	0,95	0,22	1	1	0	1
BK	20+35	0,98	0,16	1	1	0	1
BK	76-25	0,98	0,16	1	1	0	1
BK	93-69	0,73	0,45	1	1	0	1
BK	12+25+8+5	0,93	0,27	1	1	0	1
BK	(52+29):9	0,95	0,22	1	1	0	1
BK	(86+23):9	0,90	0,30	1	1	0	1

LEGENDA: UU – ukupan uzorak učenika; KK – učenici OŠ Krune Krstića; BK – učenici OŠ Bartula Kašića

Tablica 7: Tablični prikaz aritmetičkih sredina (M), standardnih devijacija (SD), medijana (C), moda (D) te raspona rezultata (min i max) točnosti odgovora unutar pojedinih zadataka različitih računskih operacija na ukupnom uzorku 4. razreda s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića)

UZORAK	**ZADATAK**	**M**	**SD**	**C**	**D**	**min**	**max**
UU	556+374	0,93	0,26	1	1	0	1
UU	20+35	0,88	0,32	1	1	0	1
UU	76-25	0,93	0,26	1	1	0	1
UU	93-69	0,78	0,42	1	1	0	1
UU	12+25+8+5	0,77	0,43	1	1	0	1
UU	(52+29):9	0,58	0,50	1	1	0	1
UU	(87-39):8	0,71	0,46	1	1	0	1
KK	46+14	0,94	0,24	1	1	0	1
KK	20+35	0,79	0,42	1	1	0	1
KK	76-25	0,85	0,36	1	1	0	1
KK	93-69	0,82	0,39	1	1	0	1
KK	12+25+8+5	0,82	0,39	1	1	0	1
KK	(52+29):9	0,45	0,51	1	1	0	1
KK	(87-39):8	0,52	0,51	1	1	0	1
BK	46+14	0,92	0,28	1	1	0	1
BK	20+35	0,97	0,17	1	1	0	1
BK	76-25	1	0	1	1	0	1
BK	93-69	0,75	0,44	1	1	0	1
BK	12+25+8+5	0,72	0,45	1	1	0	1
BK	(52+29):9	0,69	0,47	1	1	0	1
BK	(87-39):8	0,89	0,32	1	1	0	1

LEGENDA: UU – ukupan uzorak učenika; KK – učenici OŠ Krune Krstića; BK – učenici OŠ Bartula Kašića

Tablica 8: Tablični prikaz aritmetičkih sredina (M), standardnih devijacija (SD), medijana (C), moda (D) te raspona rezultata (min i max) točnosti odgovora unutar pojedinih zadataka različitih računskih operacija na ukupnom uzorku 5. razreda s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića)

UZORAK	**ZADATAK**	**M**	**SD**	**C**	**D**	**min**	**max**
UU	4 956+6 374	0,88	0,33	1	1	0	1
UU	145 500-79 845	0,71	0,46	1	1	0	1
UU	45 000:150	0,69	0,47	1	1	0	1
UU	999·9	0,86	0,35	1	1	0	1
UU	1 200+8 500+350+ 2 800+500+150	0,57	0,50	1	1	0	1
UU	7·49	0,82	0,39	1	1	0	1
UU	(87-39):8	0,86	0,35	1	1	0	1
KK	4 956+6 374	0,89	0,37	1	1	0	1
KK	145 500-79 845	0,73	0,45	1	1	0	1
KK	45 000:150	0,88	0,45	1	1	0	1
KK	999·9	0,58	0,50	1	1	0	1
KK	1 200+8 500+350+ 2 800+500+150	0,79	0,42	1	1	0	1
KK	7·49	0,79	0,42	1	1	0	1
KK	(87-39):8	0,52	0,51	1	1	0	1
BK	4 956+6 374	0,94	0,25	1	1	0	1
BK	145 500-79 845	0,69	0,48	1	1	0	1
BK	45 000:150	0,63	0,50	1	1	0	1
BK	999·9	0,81	0,40	1	1	0	1
BK	1 200+8 500+350+ 2 800+500+150	0,56	0,51	1	1	0	1
BK	7·49	0,88	0,34	1	1	0	1
BK	(87-39):8	1	0	1	1	0	1

LEGENDA: UU – ukupan uzorak; KK – učenici OŠ Krune Krstića; BK – učenici OŠ Bartula Kašića

U nastavku su u svrhu odgovora na *Problem 1* prikazani čestina različitih strategija računanja za rješavanje zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) i prosječna točnost odgovora s obzirom na pojedinu strategiju računanja na ukupnom uzorku unutar pojedinog razreda (3., 4. i 5.).

Tablica 9: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na ukupnom uzorku 3. razreda (N=68)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA	TOČNOST
46+14	rastavljanje na D i J	34/68 (50%)	33/34 (97,06%)
	pisano zbrajanje	14/68 (20,59%)	13/14 (92,86%)
	rastavljanje na brojeve	14/68 (20,59%)	14/14 (100%)
	zbrajanje napamet	6/68 (8,82%)	5/6 (83,33%)
20+35	rastavljanje na D i J	45/68 (66,18%)	44/45 (97,78%)
	pisano zbrajanje	13/68 (19,12%)	12/13 (92,13%)
	zbrajanje napamet	8/68 (11,76%)	8/8 (100%)
	rastavljanje na brojeve	2/68 (2,94%)	2/2 (100%)
76-25	rastavljanje na D i J	31/68 (45,59%)	27/31 (87,10%)
	rastavljanje na brojeve	21/68 (30,88%)	19/21 (90,48%)
	oduzimanje napamet	9/68 (13,24%)	9/9 (100%)
	pisano oduzimanje	7/68 (10,29%)	7/7 (100%)
93-69	rastavljanje na D i J	26/68 (38,24%)	15/26 (57,69%)
	rastavljanje na brojeve	25/68 (36,76%)	17/25 (68%)
	oduzimanje napamet	10/68 (14,71%)	8/10 (80%)
	pisano oduzimanje	7/68 (10,29%)	4/7 (57,14%)
12+25+8+5	zbrajanje parova pribrojnika napamet	25/68 (36,76%)	25/25 (100%)
	zbrajanje po redu	23/68 (33,82%)	20/23 (86,95%)
	rastavljanje na brojeve pa zbrajanje po redu	7/68 (10,29%)	7/7 (100%)
	pisano zbrajanje	6/68 (8,82%)	6/6 (100%)
	rastavljanje na D i J pa zbrajanje po redu	3/68 (4,41%)	2/3 (66,67%)
	pisano zbrajanje pa zbrajanje po redu	1/68 (1,47%)	1/1 (100%)
	zbrajanje napamet	1/68 (1,47%)	1/1 (100%)
	zbrajanje parova pribrojnika napamet pa pisano zbrajanje	1/68 (1,47%)	1/1 (100%)
	zbrajanje po redu pa pisano zbrajanje	1/68 (1,47%)	1/1 (100%)
(52+29):9	zbrajanje napamet i dijeljenje napamet	56/68 (82,35%)	55/56 (98,21%)
	rastavljanje na brojeve i dijeljenje napamet	7/68 (10,29%)	6/7 (85,71%)
	pisano zbrajanje i dijeljenja napamet	5/68 (7,35%)	5/5 (100%)
(86-23):7	oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	55/68 (80,88%)	50/55 (90,91%)
	rastavljanje na brojeve i dijeljenje napamet	9/68 (13,24%)	7/9 (77,78%)
	pisano oduzimanje i dijeljenje napamet	4/68 (5,88%)	3/4 (75%)

Uvidom u Tablicu 9. vidljivo je da su učenici 3. razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića prilikom zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva najčešće koristili strategiju rastavljanja brojeva na desetice i jedinice. Također je vidljivo kako učenici imaju višu prosječnu točnost korištenjem iste strategije u zadacima zbrajanja u odnosu na oduzimanje. U složenijim računskim operacijama (zbrajanje većeg broja pribrojnika i kombinacija zbrajanja/oduzimanja i dijeljenja) učenici su se najčešće koristili strategijom zbrajanja parova pribrojnika (uz 100% točnost na 36,76% uzorka) napamet te strategijom zbrajanja/oduzimanja i dijeljenja napamet. Iz tablice je vidljivo kako su učenici imali višu prosječnu točnost prilikom kombinacije zbrajanja i dijeljenja u odnosu na kombinaciju oduzimanja i dijeljenja.

Tablica 10: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na ukupnom uzorku 4. razreda (N=69)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA	TOČNOST
556+374	pisano zbrajanje	68/69 (98,55%)	64/68 (94,12%)
	zbrajanje napamet	1/69 (1,45%)	0/1 (0%)
746-275	pisano oduzimanje	68/69 (98,55%)	61/68 (89,71%)
	oduzimanje napamet	1/69 (1,45%)	0/1 (0%)
5·49	pisano množenje	66/69 (95,65%)	61/69 (88,41%)
	množenje napamet	3/69 (4,35%)	3/3 (100%)
7·(50+49)	pisano zbrajanje i pisano množenje	37/69 (53,62%)	26/37 (70,27%)
	zbrajanje napamet i pisano množenje	29/69 (42,03%)	25/29 (86,21%)
	zbrajanje napamet i množenje napamet	2/69 (2,90%)	1/2 (50%)
	pisano zbrajanje i množenje napamet	1/69 (1,45%)	0/1 (0%)
312+125+48+35	pisano zbrajanje parova pribrojnika	27/69 (39,13%)	21/27 (77,77%)
	pisano zbrajanje svih pribrojnika	23/69 (33,33%)	18/23 (78,26%)
	pisano zbrajanje po redu	13/69 (18,84%)	6/13 (46,15%)
	zbrajanje parova pribrojnika napamet	6/69 (8,70%)	6/6 (100%)
(652+329):9	pisano zbrajanje i pisano dijeljenje	58/69 (84,06%)	34/58 (58,62%)
	zbrajanje napamet i pisano dijeljenje	5/69 (7,25%)	3/5 (60%)
	zbrajanje napamet i dijeljenje napamet	3/69 (4,35%)	0/3 (0%)
	pisano zbrajanje i dijeljenje napamet	3/69 (4,35%)	1/3 (33,33%)
(87-39):8	pisano oduzimanje i dijeljenje napamet	45/69 (65,22%)	42/45 (93,33%)
	pisano oduzimanje i pisano dijeljenje	18/69 (26,09%)	2/18 (11,11%)
	oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	5/69 (7,25%)	4/5 (80%)
	oduzimanje napamet i pisano dijeljenje	1/69 (1,45%)	0/1 (0%)

Uvidom u Tablicu 10. vidljivo je da su učenici 4. razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića prilikom zbrajanja i oduzimanja te množenja dva broja najčešće koristili strategiju pisanog računa. Također je vidljivo kako učenici imaju otprilike jednaku visoku prosječnu točnost korištenjem iste strategije u navedenim računskim operacijama. U složenijim računskim operacijama (zbrajanje većeg broja pribrojnika i kombinacija zbrajanja/oduzimanja i množenja/dijeljenja) učenici su najčešće koristili strategiju pisanog zbrajanja parova pribrojnika i strategiju kombiniranja pisanog zbrajanja i pisanog množenja ili dijeljenja dok su u zadnjem zadatku najčešće koristili strategiju pisanog oduzimanja i dijeljenja napamet s obzirom na to da je u zadatku korišten jednoznamenkasti broj za dijeljenje.

Tablica 11: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na ukupnom uzorku 5. razreda (N=49)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA	TOČNOST
4 956+6 374	pisano zbrajanje	49/49 (100%)	43/49 (87,76%)
145 500-79 845	pisano oduzimanje	49/49 (100%)	35/49 (71,43%)
45 000:150	pisano dijeljenje	41/49 (83,76%)	38/41 (92,68%)
	dijeljenje napamet	4/49 (8,16%)	3/4 (75%)
	pogađanje	4/49 (8,16%)	1/4 (25%)
999·9	pisano množenje	47/49 (95,92%)	41/47 (87,23%)
	množenje napamet	1/49 (2,04%)	1/1 (100%)
1 200+8 500+350	povezivanje okruglih zbrojeva	14/49 (28,57%)	11/14 (78,57%)
+2 800+500+150	pisano zbrajanje po redu	13/49 (26,53%)	7/13 (53,85%)
	pisano zbrajanje parova pribrojnika	13/49 (26,53%)	6/13 (46,15%)
	pisano zbrajanje svih pribrojnika	8/49 (16,33%)	5/8 (62,50%)
	zbrajanje napamet po redu	1/49 (2,04%)	0/1 (0%)
7·49	pisano množenje	48/49 (97,96%)	40/48 (81,63%)
	množenje napamet	1/49 (2,04%)	1/1 (100%)
(87-39):8	pisano oduzimanje i dijeljenje napamet	39/49 (79,59%)	36/39 (92,31%)
	pisano oduzimanje i pisano dijeljenje	6/49 (12,24%)	1/6 (16,67%)
	oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	4/49 (8,16%)	4/4 (100%)

Uvidom u Tablicu 11. vidljivo je da su učenici 5. razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića prilikom zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja dva broja najčešće koristili strategiju pisanog računa. Također je vidljivo kako učenici imaju najnižu prosječnu točnost korištenjem strategije pisanog računa kod zadatka oduzimanja. U složenijim računskim operacijama (zbrajanje većeg broja pribrojnika i kombinacija oduzimanja i dijeljenja) učenici su koristili strategiju povezivanja okruglih brojeva te strategiju pisanog oduzimanja i dijeljenja napamet kao i učenici 4. razreda s obzirom da je u zadatku korišten jednoznamenkasti broj za dijeljenje. Učenici 4. i 5. razreda u zadnjem zadatku imaju otprilike jednaku visoku točnost odgovora.

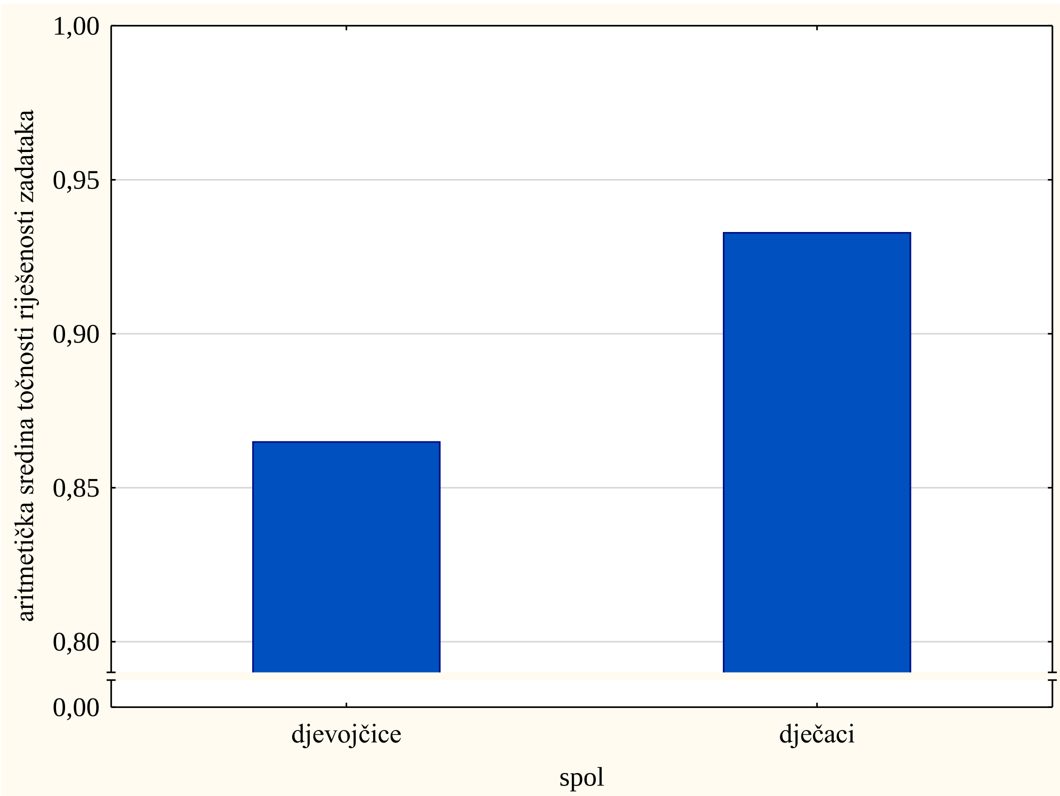
U svrhu odgovora na *Problem 2* (ispitati razlike (s obzirom na školu i spol) u točnosti riješenosti zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) koristeći različite strategije računanja kod učenika nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića) računaju se t-testovi za nezavisne uzorke.

Tablica 12: Tablični prikaz t-testa za velike nezavisne uzorke radi utvrđivanja razlike u točnosti riješenosti zadataka kod učenika 3. i 4. razreda s obzirom na spol i pripadnost školi (OŠ Bartula Kašića i OŠ Krune Krstića)

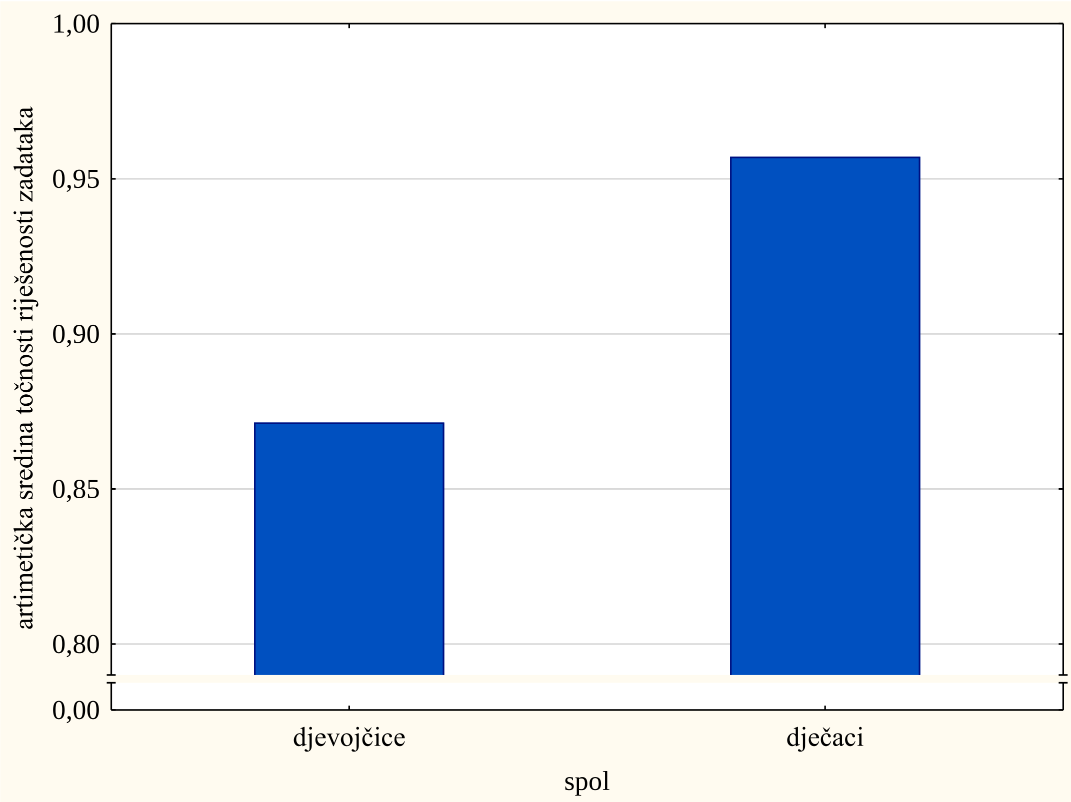
	3. razred						4. razred		
	BK+KK/spol			BK/spol			BK/KK		
	t	*p*	*df*	*t*	*p*	*df*	*t*	*p*	*df*
aritmetička sredina točnosti riješenosti zadataka	-2,4	<0,1	66	-2,8	<0,1	38	-3	<0,1	67

LEGENDA: BK - OŠ Bartula Kašića; KK - OŠ Krune Krstića; BK+KK/spol – spolne razlike na cijelom uzorku; BK/spol – spolne razlike s obzirom na pripadnost školi (OŠ Bartula Kašića); BK/KK – razlika s obzirom na pripadnost školi (OŠ Bartula Kašića ili OŠ Krune Krstića); t – t-test za velike nezavisne uzorke; p – postotak značajnosti, df – stupnjevi slobode

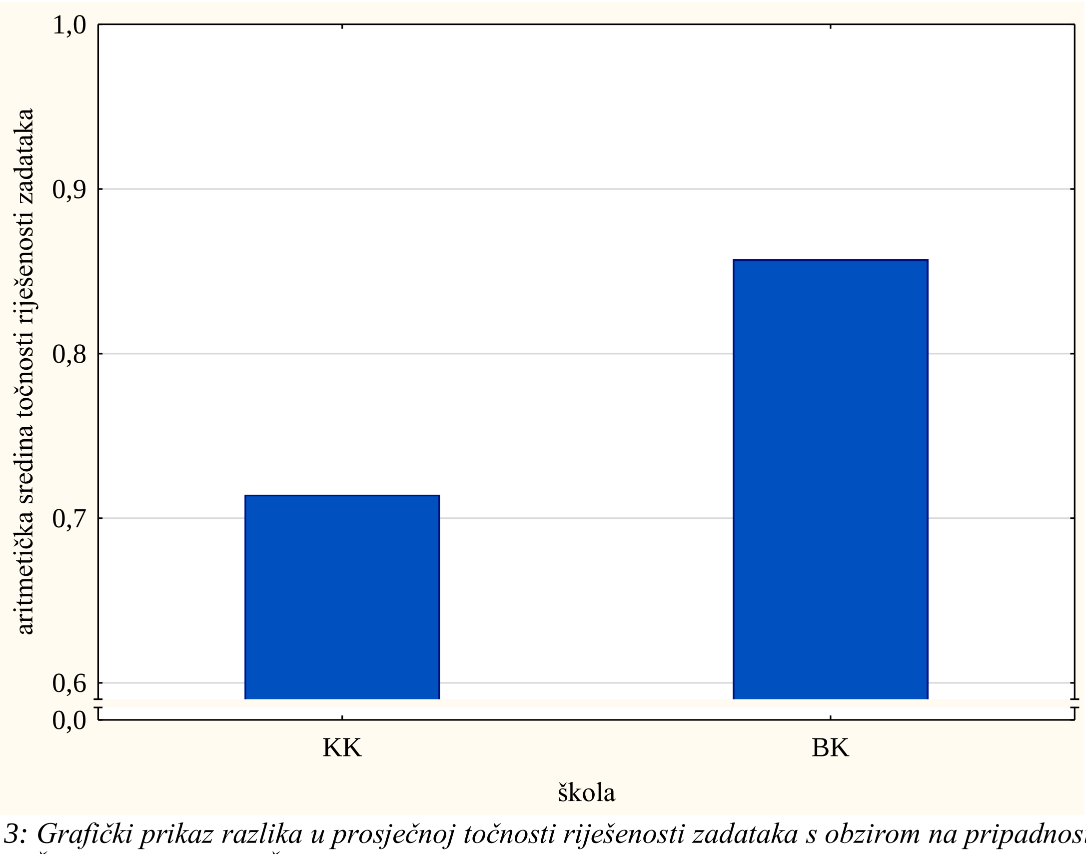
Primjenom t-testa za velike nezavisne uzorke utvrđena je statistički značajna razlika u točnosti riješenosti zadataka na cijelom uzorku (OŠ Bartula Kašića i OŠ Krune Krstića) učenika 3. razreda s obzirom na spol (M=32; Ž=36). Primjenom istog testa utvrđena je statistički značajna razlika u točnosti riješenosti zadataka između učenika 3. razreda s obzirom na spol (M=20; Ž=20) i pripadnost školi (OŠ Bartula Kašića). U oba slučaja dječaci su uspješnije koristili različite strategije računanja od djevojčica pri zadacima različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih), to jest imali su viši prosjek točnosti riješenosti zadataka. Korištenjem istog testa utvrđena je statistički značajna razlika u točnosti riješenosti zadataka između učenika 4. razreda s obzirom na pripadnost školi (OŠ Bartula Kašića ili OŠ Krune Krstića). Učenici OŠ Bartula Kašića su točnije rješavali zadatke različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih) korištenjem različitih strategija računanja u odnosu na učenike OŠ Krune Krstića. Preostala testiranja statističkih značajnosti razlika primjenom t-testa za (male ili velike) nezavisne uzorke nisu utvrdila statistički značajne razlike (na cijelom uzorku, s obzirom na spol, pripadnost školi te kombinaciju istih) u točnosti riješenosti zadataka u 3., 4. i 5. razredu, to jest navedeni uzorci su imali otprilike jednaku ukupnu prosječnu točnost riješenosti zadataka.



Slika 1: Grafički prikaz razlika u prosječnoj točnosti riješenosti zadataka s obzirom na spol (djevojčice/dječaci) na ukupnom uzorku 3. razreda.



Slika 2: Grafički prikaz razlika u prosječnoj točnosti riješenosti zadataka s obzirom na spol (djevojčice/dječaci) na uzorku 3. razreda OŠ Bartula Kašića.



Slika 3: Grafički prikaz razlika u prosječnoj točnosti riješenosti zadataka s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića) na ukupnom uzorku 4. razreda.

S obzirom na dobivene značajne razlike s obzirom na spol na cijelom uzorku 3. razreda, s obzirom na spol na uzorku 3. razreda OŠ Bartula Kašića te razlike između škola na uzorku 4. razreda u nastavku su prikazani čestina različitih strategija računanja za rješavanje zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te kombinacije istih), prosječna točnost odgovora korištenih strategija računanja na ukupnom uzorku 3. razreda, na uzorku 3. razreda OŠ Bartula Kašića s obzirom na spol te na ukupnom uzorku 4. razreda s obzirom na pripadnost školi.

Tablica 13: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na ukupnom uzorku 3. razreda s obzirom na spol (N=68)

ZAD	STRAT	Ž ČEST	Ž TOČN	M ČEST	M TOČN
46+14	rastavljanje na D i J	17/36 (47,22%)	16/17 (94,12%)	17/32 (53,13%)	17/17 (100%)
	rastavljanje na brojeve	8/36 (22,22%)	8/8 (100%)	5/32 (15,62%)	5/5 (100%)
	pisano zbrajanje	7/36 (19,44%)	6/7 (85,71%)	7/32 (21,88%)	7/7 (100%)
	zbrajanje napamet	4/36 (11,11%)	3/4 (75%)	3/32 (9,38%)	3/3 (100%)
20+35	rastavljanje na D i J	21/36 (58,33%)	20/21 (95,24%)	23/32 (71,88%)	22/23 (95,65%)
	pisano zbrajanje	8/36 (22,22%)	7/8 (87,5%)	5/32 (15,63%)	5/5 (100%)
	zbrajanje napamet	6/36 (16,67%)	6/6 (100%)	3/32 (9,38%)	3/3 (100%)
	rastavljanje na brojeve	1/36 (2,78%)	1/1 (100%)	1/32 (3,63%)	5/5 (100%)
76-25	rastavljanje na D i J	17/36 (47,22%)	13/17 (76,47%)	14/32 (43,75%)	14/14 (100%)
	rastavljanje na brojeve	11/36 (30,56%)	9/11 (81,82%)	10/32 (31,25%)	10/10 (100%)
	oduzimanje napamet	5/36 (13,89%)	5/5 (100%)	4/32 (12,50%)	4/4 (100%)
	pisano oduzimanje	3/36 (8,33%)	3/3 (100%)	4/32 (12,50%)	4/4 (100%)
93-69	rastavljanje na D i J	14/36 (38,89%)	6/14 (42,86%)	12/32 (37,50%)	9/12 (75%)
	rastavljanje na brojeve	14/36 (38,89%)	9/14 (64,29%)	11/32 (34,38%)	8/11 (72,73%)
	oduzimanje napamet	5/36 (13,89%)	4/5 (80%)	5/32 (15,63%)	4/5 (80%)
	pisano oduzimanje	3/36 (8,33%)	1/3 (33,33%)	4/32 (12,50%)	2/4 (50%)
12+25 +8+5	zbrajanje parova pribrojnika napamet	12/36 (33,33%)	12/12 (100%)	13/32 (40,63%)	13/13 (100%)
	zbrajanje po redu	14/36 (38,89%)	12/14 (85,71%)	9/32 (28,13%)	8/9 (88,89%)
	rastavljanje na brojeve pa zbrajanje po redu	3/36 (8,33%)	3/3 (100%)	4/32 (12,50%)	4/4 (100%)
	rastavljanje na D i J pa zbrajanje po redu	3/36 (8,33%)	2/3 (66,67%)	0/32 (0%)	
	pisano zbrajanje	3/36 (8,33%)	3/3 (100%)	3/32 (9,38%)	3/3 (100%)
	pisano zbrajanje pa	1/36 (2,78%)	1/1 (100%)	0/32 (0%)	

	zbrajanje po redu				
	zbrajanje napamet	0/36 (0%)		1/32 (3,13%)	1/1 (100%)
	zbrajanje parova pribrojnika napamet pa pisano zbrajanje	0/36 (0%)		1/32 (3,13%)	1/1 (100%)
	zbrajanje po redu pa pisano zbrajanje	0/36 (0%)		1/32 (3,13%)	1/1 (100%)
(52+29):9	zbrajanje napamet i dijeljenje napamet	30/36 (83,33%)	29/30 (96,67%)	26/32 (81,25%)	26/26 (100%)
	rastavljanje na brojeve pa dijeljenje napamet	5/36 (13,89%)	5/5 (100%)	3/32 (9,38%)	3/3 (100%)
	pisano zbrajanje pa dijeljenje napamet	3/36 (8,33%)	3/3 (100%)	2/32 (6,25%)	2/2 (100%)
(86-23):7	oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	30/36 (83,33%)	26/30 (86,67%)	25/32 (78,13%)	24/25 (96%)
	rastavljanje na brojeve pa dijeljenje napamet	4/36 (11,11%)	4/4 (100%)	5/32 (15,63%)	3/5 (60%)
	pisano oduzimanje pa dijeljenje napamet	2/36 (5,56%)	2/2 (100%)	2/32 (5,56%)	1/2 (50%)

LEGENDA: ZAD – zadatak; STRAT – korištena strategija računanja; Ž ČEST – čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod djevojčica; Ž TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod djevojčica; M ČEST - čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod dječaka; M TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod dječaka

Uvidom u Tablicu 13. vidljivo je da dječaci ukupnog uzorka 3. razreda imaju višu prosječnu točnost od djevojčica iako je u pitanju korištenje iste strategije ovisno o zadatku, osim u slučaju zbrajanja većeg broja pribrojnika gdje su i dječaci i djevojčice imali stopostotnu točnost što ukazuje na činjenicu kako dječaci efikasnije koriste strategije računanja različitih računskih operacija.

Tablica 14: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na uzorku 3. razreda OŠ Bartula Kašića s obzirom na spol (N=40)

ZAD	**STRAT**	**Ž ČEST**	**Ž TOČN**	**M ČEST**	**M TOČN**
46+14	rastavljanje na D i J	7/20 (35%)	7/7 (100%)	8/20 (40%)	8/8 (100%)
	pisano zbrajanje	7/20 (35%)	6/7 (85,71%)	7/20 (21,88%)	7/7 (100%)
	rastavljanje na brojeve	3/20 (22,22%)	3/3 (100%)	2/20 (10%)	2/2 (100%)
	zbrajanje napamet	3/20 (15%)	2/3 (66,67%)	3/20 (15%)	3/3 (100%)

20+35	rastavljanje na D i J	7/20 (35%)	7/7 (100%)	11/20 (55%)	11/11 (100%)
	pisano zbrajanje	8/20 (40%)	7/8 (87,5%)	5/20 (25%)	5/5 (100%)
	zbrajanje napamet	5/20 (25%)	5/5 (100%)	3/20 (15%)	3/3 (100%)
	rastavljanje na brojeve	0/36 (0%)		1/20 (5%)	1/1 (100%)
76-25	rastavljanje na D i J	8/20 (40%)	8/8 (100%)	7/20 (35%)	14/14 (100%)
	rastavljanje na brojeve	5/20 (25%)	4/5 (80%)	5/20 (25%)	10/10 (100%)
	oduzimanje napamet	4/20 (20%)	4/4 (100%)	4/20 (20%)	4/4 (100%)
	pisano oduzimanje	3/20 (15%)	3/3 (100%)	4/20 (20%)	4/4 (100%)
93-69	rastavljanje na D i J	6/20 (30%)	2/6 (33,33%)	6/20 (30%)	6/6 (100%)
	rastavljanje na brojeve	6/20 (30%)	5/6 (83,33%)	6/20 (30%)	5/6 (83,33%)
	oduzimanje napamet	5/20 (25%)	4/5 (80%)	5/20 (25%)	3/4 (75%)
	pisano oduzimanje	3/20 (15%)	1/3 (33,33)	4/20 (20%)	2/4 (50%)
12+25 +8+5	zbrajanje parova pribrojnika napamet	6/20 (33,33%)	6/6 (100%)	8/20 (40%)	8/8 (100%)
	zbrajanje po redu	7/20 (35%)	6/7 (85,71%)	5/20 (28,13%)	4/5 (80%)
	pisano zbrajanje	3/20 (15%)	3/3 (100%)	3/20 (15%)	3/3 (100%)
	rastavljanje na brojeve pa zbrajanje po redu	1/20 (5%)	1/1 (100%)	1/20 (5%)	1/1 (100%)
	rastavljanje na D i J pa zbrajanje po redu	2/20 (10%)	1/2 (50%)	0/20 (0%)	
	pisano zbrajanje pa zbrajanje po redu	1/20 (10%)	1/1 (100%)	0/20 (0%)	
	zbrajanje napamet	1/20 (5%)		1/20 (5%)	1/1 (100%)
	zbrajanje parova pribrojnika napamet pa pisano zbrajanje	0/20 (0%)		1/20 (5%)	1/1 (100%)
	zbrajanje po redu pa pisano zbrajanje	0/20 (0%)		1/20 (5%)	1/1 (100%)
(52+29):9	zbrajanje napamet i dijeljenje napamet	16/20 (80%)	29/30 (96,67%)	26/32 (81,25%)	26/26 (100%)
	pisano zbrajanje pa dijeljenje napamet	3/20 (15%)	3/3 (100%)	2/20 (10%)	2/2 (100%)
	rastavljanje na brojeve pa dijeljenje napamet	1/20 (5%)	1/1 (100%)	3/20 (15%)	2/3 (66,67%)
(86-23):7	oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	16/20 (80%)	13/16 (81,25%)	15/20 (75%)	15/15 (100%)
	rastavljanje na brojeve pa dijeljenje napamet	2/20 (10%)	2/2 (100%)	3/20 (15%)	3/3 (100%)
	pisano oduzimanje pa dijeljenje napamet	2/20 (10%)	2/2 (100%)	2/20 (10%)	1/2 (50%)

LEGENDA: ZAD – zadatak; STRAT – korištena strategija računanja; Ž ČEST – čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod djevojčica; Ž TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod djevojčica; M ČEST - čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod dječaka; M TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod dječaka

Uvidom u Tablicu 14. vidljivo je da dječaci u svim zadacima postižu stopostotnu točnost koristeći se najčešćom strategijom rješavanja ovisno o zadatku te da u 4., 5., 6., i 7. postižu višu prosječnu točnost riješenosti od djevojčica. U 4. zadatku jednak broj učenika i učenica 3. razreda OŠ Bartula Kašića koristio je dvije strategije: strategiju rastavljanja na desetice i jedinice te strategiju rastavljanja na brojeve, a vidljivo je kako su djevojčice višu točnost postigle strategijom rastavljanja na brojeve, a dječaci strategijom rastavljanja na desetice i jedinice.

Tablica 15: Tablični prikaz čestine različitih strategija računanja i prosječne točnosti odgovora s obzirom na pojedinu korištenu strategiju na ukupnom uzorku 4. razreda s obzirom na pripadnost školi (OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića (n1=33; n2=36)

ZAD	**STRAT**	**KK ČEST**	**KK TOČN**	**BK ČEST**	**BK TOČN**
556+374	pisano zbrajanje	32/33 (96,97%)	31/32 (96,88%)	36/36 (100%)	33/36 (91,67%)
	zbrajanje napamet	1/33 (3,03%)	0/1 (0%)	0/36 (0%)	
746-275	pisano oduzimanje	32/33 (96,97%)	26/32 (81,25%)	36/36 (100%)	35/36 (97,22%)
	oduzimanje napamet	1/33 (3,03%)	0/1 (0%)	0/36 (0%)	
5·49	pisano množenje	31/33 (93,94%)	26/31 (83,87%)	34/36 (94,44%)	34/34 (100%)
	množenje napamet	2/33 (6,06%)	2/2 (100%)	2/36 (5,56%)	2/2 (100%)
7·(50+49)	pisano zbrajanje i pisano množenje	19/33 (57,58%)	14/19 (73,68%)	18/36 (50%)	13/15 (86,67%)
	zbrajanje napamet i pisano množenje	12/33 (36,36%)	11/12 (91,67%)	17/36 (47,22%)	17/17 (100%)
	zbrajanje napamet i množenje napamet	1/33 (3,03%)	1/1 (100%)	1/36 (2,78%)	0/1 (100%)
	pisano zbrajanje i množenje napamet	1/33 (3,03%)	1/1 (100%)	0/36 (0%)	
312+125 +48+35	pisano zbrajanje parova pribrojnika	21/33 (63,64%)	17/21 (80,95%)	7/36 (19,44%)	6/7 (85,71%)
	pisano zbrajanje svih pribrojnika	8/33 (24,24%)	7/8 (87,5%)	15/36 (41,67%)	11/15 (73,33%)
	pisano zbrajanje po redu	1/33 (3,03%)	0/1 (0%)	12/36 (33,33%)	7/12 (58,33%)
	zbrajanje parova pribrojnika napamet	3/33 (9,09%)	3/3 (100%)	2/36 (5,56%)	2/2 (100%)

(652+329):9 pisano zbrajanje i pisano dijeljenje	27/33 (81,82%)	14/27 (51,85%)	31/36 (86,11%)	20/31 (64,52%)
zbrajanje napamet i pisano dijeljenje	3/33 (9,09%)	2/3 (66,67%)	3/36 (8,33%)	3/3 (100%)
zbrajanje napamet i dijeljenje napamet	2/33 (6,06%)	0/2 (0%)	1/36 (2,78%)	0/1 (0%)
pisano zbrajanje i dijeljenje napamet	1/33 (3,03%)	1/1 (100%)	1/36 (2,78%)	0/1 (0%)
(87-39):8 pisano oduzimanje i dijeljenje napamet	16/33 (48,48%)	14/16 (87,50%)	29/36 (80,56%)	29/29 (100%)
pisano oduzimanje i pisano dijeljenje	14/33 (42,42%)	2/14 (14,29%)	4/36 (11,11%)	2/4 (50%)
oduzimanje napamet i dijeljenje napamet	2/33 (6,06%)	1/2 (50%)	3/36 (8,33%)	1/1 (100%)
oduzimanje napamet i pisano dijeljenje	1/33 (3,03%)	0/1 (0%)	0/36 (0%)	

LEGENDA: ZAD – zadatak; STRAT – korištena strategija računanja; KK ČEST – čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod učenika OŠ Krune Krstića; KK TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod učenika OŠ Krune Krstića; BK ČEST - čestina korištenja pojedine strategije ovisno o zadatku kod učenika OŠ Bartula Kašića; BK TOČN – točnost pojedinog zadatka ovisno o korištenoj strategiji kod učenika OŠ Bartula Kašića

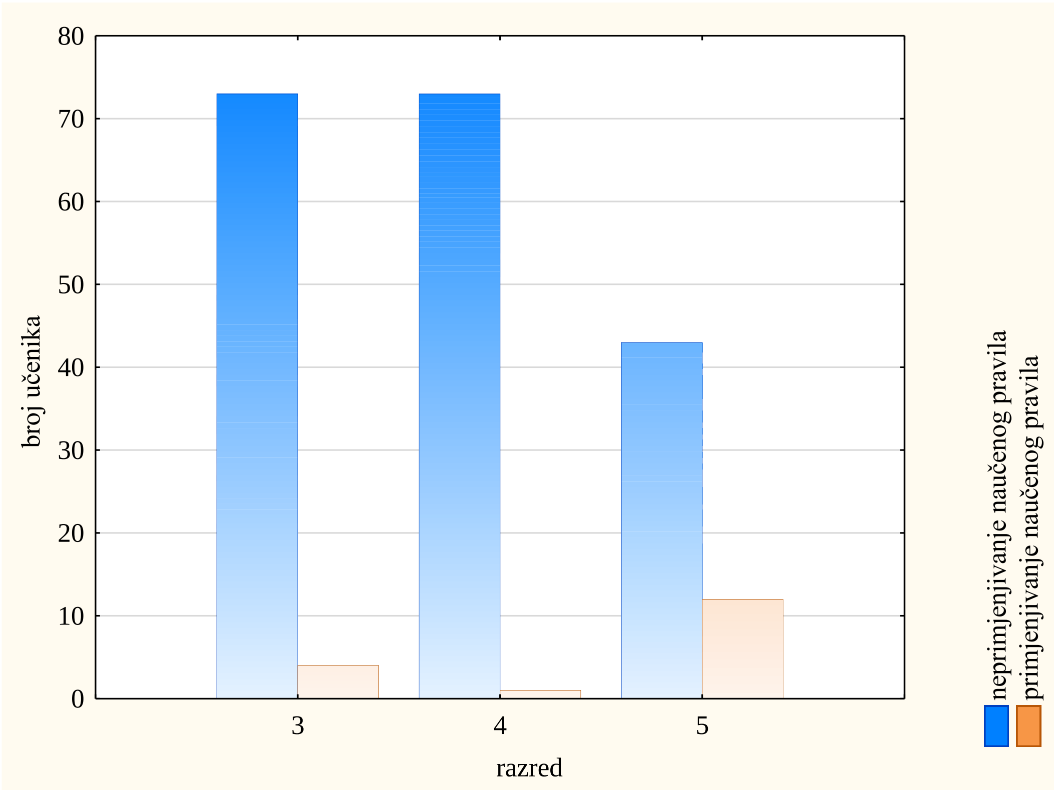
Uvidom u Tablicu 15. vidljivo je da učenici 4. razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića najčešće koriste iste strategije računanja ovisno o zadatku, međutim, učenici OŠ Bartula Kašića su uspješniji u njihovom korištenju tj. postižu višu prosječnu točnost riješenosti na svim zadacima osim u prvom zadatku zbrajanja troznamenkastih brojeva u kojem učenici OŠ Krune Krstića postižu višu prosječnu točnost. Učenici obiju škola najnižu prosječnu točnost postižu na zadatku kombinacije zbrajanja i dijeljenja.

S obzirom na činjenicu da je jedan zadatak u sva tri razreda (3. – 80:0; 4. – 400:0; 5. – 40 000:0) zahtijevao isto znanje (s nulom se ne može dijeliti), zadatak je obrađen posebno i točnost rješavanja nije ulazila u statističku obradu ostalih zadataka.

Tablica 16: Tablični prikaz postotka učenika koji jesu i nisu primijenili naučeno pravilo o nedijeljenju s nulom na cijelom uzorku pojedinog razreda

	3. razred	4. razred	5. razred
primjenjivanje naučenog pravila	5//77 (6,49%)	1/74 (1,35%)	13/55 (23,64%)
neprimjenjivanje naučenog pravila	72/77 (93,51%)	73/74 (98,65%)	42/55 (76,36%)

Iz Tablice 16. vidljivo je kako učenici u većoj mjeri nisu primjenjivali naučeno pravilo o nedijeljenju s nulom. Također je vidljivo kako su ovo pravilo ipak najbolje razumjeli i primijenili učenici 5. razreda (i dalje uz nisku točnost).



Slika 4: Grafički prikaz broja učenika koji jesu/nisu primijenili naučeno pravilo o nedijeljenju s nulom s obzirom na razred (3., 4. i 5.).

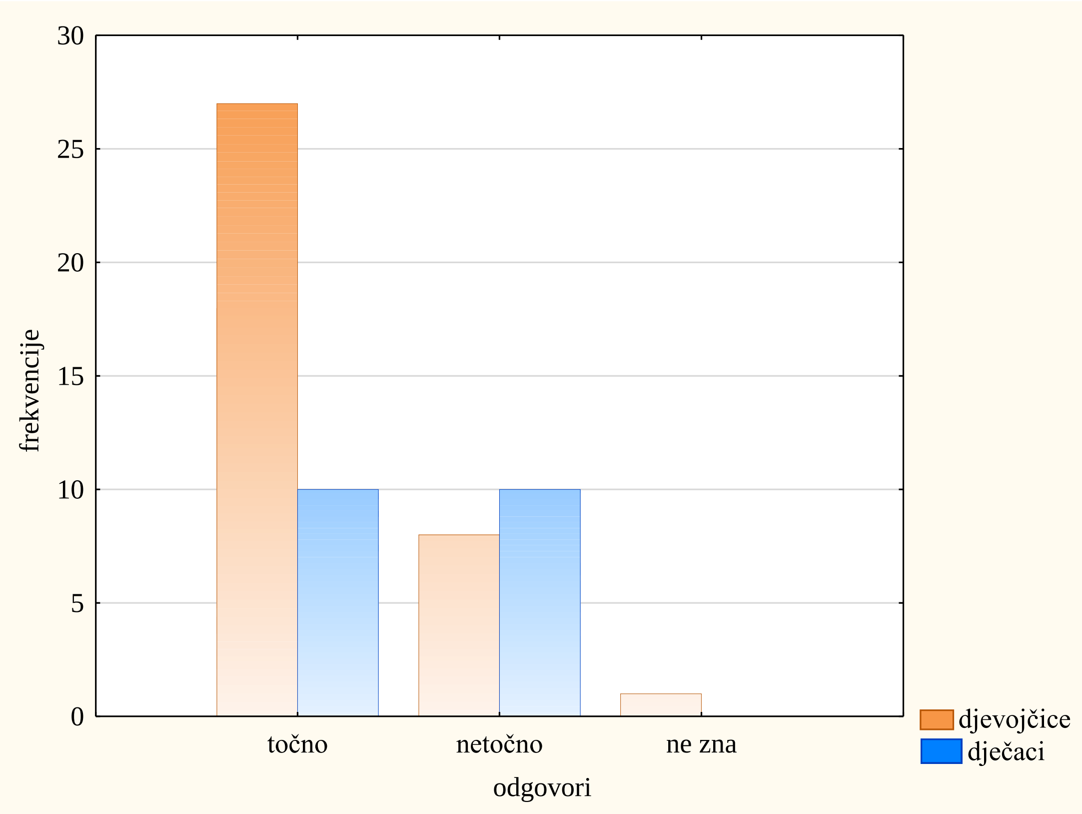
U svrhu odgovora na *Problem 3* (ispitati razlike s obzirom na spol u točnosti procjenjivanja točnog odgovora zadataka različitih računskih operacija zbrajanje, oduzimanje i množenje) kod učenika nižih razreda OŠ Krune Krstića i OŠ Bartula Kašića) računaju se hi kvadrat testovi značajnosti.

Tablica 17: Tablični prikaz hi kvadrat testa značajnosti razlika radi utvrđivanja točnosti procjene točnog odgovora zadataka različitih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje i množenje)

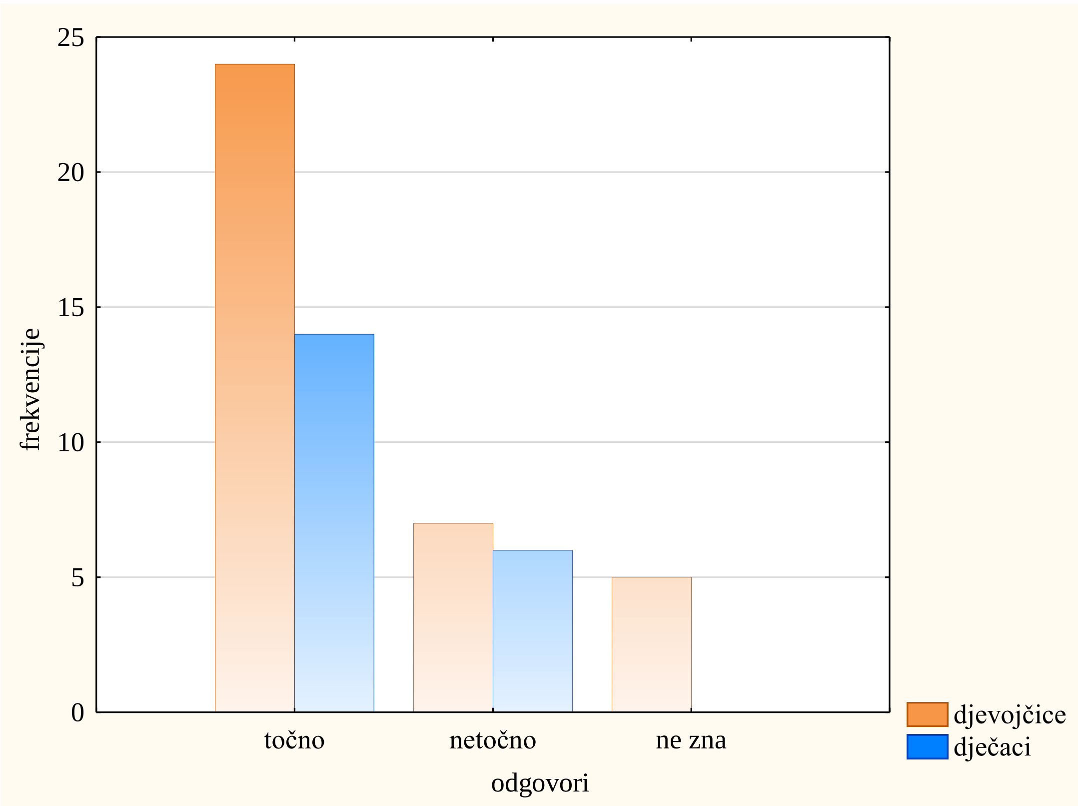
ZADATAK	χ^2	*p*	*df*
razlika u cijeni	5,09	<0,1	2
račun izgleda	5,04	<0,1	2

LEGENDA: χ^2 – hi kvadrat test, p – postotak značajnosti, df – stupnjevi slobode

Primjenom hi kvadrat testa tvrđena je statistički značajna razlika u točnosti procjenjivanja točnog odgovora u zadatku utvrđivanja razlike u cijeni između dva proizvoda na cjelokupnom uzorku učenika 5. razreda ($\chi2=5,09$; $p<0,1$). Također, utvrđena je statistički značajna razlika u točnosti procjenjivanja točnog odgovora u zadatku utvrđivanja izgleda računa na cjelokupnom uzorku učenika 5. razreda ($\chi2=5,04$; $p<0,1$). U oba slučaja su djevojčice točnije procjenjivale točan odgovor u navedenim zadacima u odnosu na dječake. Nisu utvrđene statistički značajne razlike u točnosti procjenjivanja točnog odgovora u niti jednom od četiri zadatka (*razlika u cijeni, račun izgleda, najveći umnožak* i *sve zajedno*) na cjelokupnom uzorku učenika 4. razreda. Također, nisu utvrđene statistički značajne razlike u točnosti procjenjivanja točnog odgovora u preostala dva zadatka (*najveći umnožak* i *sve zajedno*) na cjelokupnom uzorku učenika 5. razreda.



Slika 5: Grafički prikaz razlika u frekvencijama odgovora (točno/netočno/ne zna) na zadatku razlika u cijeni s obzirom na spol (djevojčice/dječaci) na ukupnom uzorku 5. razreda.



Slika 6: Grafički prikaz razlika u frekvencijama odgovora (točno/netočno/ne zna) na zadatku račun izgleda s obzirom na spol (djevojčice/dječaci) na ukupnom uzorku 5. razreda.

U svrhu odgovora na *Problem 4* (steći uvid u korištenje udžbenika *Matematičkim stazama* i *Moj sretni broj*) prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike te u percepciju o navedenim udžbenicima od strane učitelja/ica razredne nastave obiju škola) provodi se modificirana verzija ankete na 12 učitelja/ica te intervjui na 6 učiteljica.

Tablica 18: Učestalost korištenja izabranog udžbenika prilikom pripremanja nastave (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	2	50%	1	12,5%
Često	1	25%	2	25%
Rijetko	1	25%	5	62,5%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost korištenja izabranog udžbenika prilikom pripremanja nastave. Pokazalo se kako učitelji gotovo uvijek, često ili rijetko koriste udžbenik u pripremi za nastavu. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj,* njih 50% odgovorilo je kako gotovo uvijek koristi udžbenik u pripremi za nastavu, 25% često koristi udžbenik, a 25% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi udžbenik prilikom pripremanja nastave. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 12,5% učitelja odgovorilo je kako gotovo uvijek koristi udžbenik u pripremi za nastavu, 25% često koristi udžbenik, a 62,5% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi udžbenik prilikom pripremanja nastave.

Tablica 19: Učestalost slijeđenja strukture pojedine teme iz udžbenika tijekom nastavnog sata (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	1	25%	1	12,5%
Često	2	50%	3	37,5%
Rijetko	1	25%	3	37,5%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	1	12,5%

U istraživanju je provjerena učestalost slijeđenja strukture pojedine teme iz udžbenika tijekom nastavnog sata. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek slijedi strukturu pojedine teme iz udžbenika tijekom nastavnog sata, 50% često slijedi strukturu, 25% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne slijedi strukturu pojedine teme iz udžbenika tijekom nastavnog sata. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 12,5% odgovorilo je kako gotovo uvijek slijedi strukturu pojedine teme iz udžbenika tijekom nastavnog sata, 37,5% često slijedi strukturu, a 37,5% rijetko. Jedan učitelj koji se koristi udžbenikom *Matematičkim stazama* nije odgovorio na zadanu tvrdnju.

Tablica 20: Učestalost predviđanja slijeda nastavnih tema prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	1	25%	6	75%
Često	2	50%	1	12,5%
Rijetko	1	25%	0	0%

Nikad	0	0%	1	12,5%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost predviđanja slijeda nastavnih tema prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek slijedi nastavne teme prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine, 50% često slijedi nastavne teme, a 25% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne slijedi nastavne teme prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 75% odgovorilo je kako gotovo uvijek slijedi nastavne teme prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine, 12,5% često slijedi nastavne teme, a 12,5% odgovorilo je kako nikad ne slijedi nastavne teme prema točnom slijedu udžbenika tijekom školske godine.

Tablica 21: Učestalost korištenja definicija i teorema u istom obliku kako su napisani u udžbeniku tijekom nastave (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	1	25%	2	25%
Često	3	75%	5	62,5%
Rijetko	0	0%	1	12,5%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost korištenja definicija i teorema u istom obliku kako su napisani u udžbeniku tijekom nastave. Pokazalo se kako učitelji gotovo uvijek, često ili rijetko koriste definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, njih 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek koristi definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku, a 75% često. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako rijetko koristi definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku. Također, niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi definicije i teoreme u istom obliku kako su napisano u udžbeniku. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama,* 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek koristi definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku, 62,5% često koristi definicije i teoreme u istom obliku, a 12,5% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku.

Tablica 22: Učestalost korištenja matematičkog jezika i simbola iz odabranog udžbenika tijekom nastave (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	2	50%	4	50%
Često	2	50%	4	50%
Rijetko	0	0%	0	0%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost korištenja matematičkog jezika i simbola iz odabranog udžbenika tijekom nastave. Pokazalo se kako učitelji gotovo uvijek ili često koriste matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 50% odgovorilo je kako često koristi matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika, a 50% često. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako rijetko koristi matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika. Također, niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, njih 50% odgovorilo je kako gotovo uvijek koriste matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika, a 50% često. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako rijetko koristi matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika. Također, niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne koristi matematički jezik i simbole iz odabranog udžbenika tijekom nastave.

Tablica 23: Učestalost objašnjavanja nove teme na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	0	0%	1	12,5%
Često	2	50%	4	50%
Rijetko	2	50%	3	37,5%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost objašnjavanja nove teme na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku. Pokazalo se kako učitelji gotovo uvijek, često ili rijetko objašnjavaju nove teme na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, njih 50% odgovorilo je kako često objašnjavaju nove teme na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku, a 50% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako gotovo uvijek objašnjava novu temu na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku. Također, niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne objašnjava novu temu na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 12,5% odgovorilo je kako gotovo uvijek objašnjava novu temu na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku, 50% često objašnjava novu temu na isti način, a 37,5% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako nikad ne objašnjava novu temu na isti način kako je objašnjeno u udžbeniku.

Tablica 24: Učestalost doslovnog korištenja riješenih primjera iz udžbenika tijekom nastave (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja udžbenika	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	0	0%	0	0%
Često	0	0%	2	25%

Rijetko	3	75%	2	25%
Nikad	1	25%	4	50%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost doslovnog korištenja riješenih primjera iz udžbenika tijekom nastave. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj,* 75% odgovorilo je kako rijetko doslovno koriste riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, a 25% nikad. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako gotovo uvijek doslovno koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 25% odgovorilo je kako često doslovno koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, 25% rijetko doslovno koristi riješene primjere, a 50% nikad. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako gotovo uvijek doslovno koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave.

Tablica 25: Učestalost korištenja riješenih primjera iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost korištenja riješenih primjera	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	0	0%	0	0%
Često	1	25%	2	25%
Rijetko	2	50%	5	62,5%
Nikad	1	25%	1	12,5%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost korištenja riješenih primjera iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj,* 25% odgovorilo je kako često koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno dok je 50% odgovorilo kako to čini rijetko, a 25% nikad. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako gotovo uvijek koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 25% njih odgovorilo je kako često koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno dok je 62,5% odgovorilo kako to čini rijetko, a 12,5% nikad. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako gotovo uvijek koristi riješene primjere iz udžbenika tijekom nastave, ali ne doslovno.

Tablica 26: Učestalost zadavanja zadataka učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost zadavanja zadataka	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	1	25%	2	25%
Često	3	75%	6	75%
Rijetko	0	0%	0	0%
Nikad	0	0%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost zadavanja zadataka učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke. Pokazalo se kako učitelji gotovo uvijek ili često zadavaju zadatke učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek zadaju zadatke učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke, a 75% često. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako to radi rijetko ili nikad. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek zadaje zadatke učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke, a 75% često. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako to radi rijetko ili nikad.

Tablica 27: Učestalost biranja zadataka za provjeru znanja po uzoru na one iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Učestalost biranja zadataka	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Gotovo uvijek	1	25%	2	25%

Često	2	50%	4	50%
Rijetko	0	0%	2	25%
Nikad	1	25%	0	0%
Neodgovoreno	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena učestalost biranja zadataka za provjeru znanja po uzoru na one iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek bira zadatke za provjeru znanja po uzoru na one iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke dok ih je 50% odgovorilo kako to radi često, a 25% nikad. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako to rijetko radi. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama,* 25% odgovorilo je kako gotovo uvijek bira zadatke za provjeru znanja po uzoru na one iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke, 50% često, a 25% rijetko. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako to nikad ne radi.

Tablica 28: Percepcija učitelja o logičkoj povezanosti nastavnih tema u izabranom udžbeniku (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Percepcija učitelja	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Da	0	0%	1	12,5%
Uglavnom da	4	100%	7	87,5%
Uglavnom ne	0	0%	0	0%
Ne	0	0%	0	0%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o logičkoj povezanosti nastavnih tema u izabranom udžbeniku. Svi učitelji koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj* su odgovorili kako uglavnom percipiraju da su nastavne teme u izabranom udžbeniku logički povezane. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama,* 12,5% učitelja percipira kako su nastavne teme u izabranom udžbeniku logički povezane, a 87,5% percipira kako su nastavne teme u izabranom udžbeniku uglavnom logički povezane. Niti jedan učitelj nije odgovorio kako ne percipira logičku povezanost nastavnih tema u izabranom udžbeniku.

Tablica 29: Percepcija učitelja o dobroj organiziranosti nastavnih tema u izabranom udžbeniku (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Percepcija učitelja	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Da	0	0%	0	0%
Uglavnom da	4	100%	7	87,5%
Uglavnom ne	0	0%	0	0%
Ne	0	0%	1	12,5%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o dobroj organiziranosti nastavnih tema u izabranom udžbeniku. Svi učitelji koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj* su odgovorili kako uglavnom percipiraju da su nastavne teme u izabranom udžbeniku dobro organizirane. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 87,5% odgovorilo je kako uglavnom percipiraju kako su nastavne teme u izabranom udžbeniku dobro organizirane, dok 12,5% percipira kako nisu dobro organizirane.

Tablica 30: Percepcija učitelja o pridonošenju izabranog udžbenika dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Percepcija učitelja	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Da	0	0%	1	12,5%
Uglavnom da	3	75%	6	75%
Uglavnom ne	1	25%	0	0%
Ne	0	0%	1	12,5%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o pridonošenju izbranog udžbenika dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 75% odgovorilo je kako uglavnom percipiraju pridonošenje izabranog udžbenika dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja, a 25% rijetko. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 12,5% odgovorilo je kako percipira pridonošenje izabranog udžbenika dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja, 75% kako uglavnom pridonosi povezivanju znanja, a 12,5% kako ne pridonosi.

Tablica 31: Percepcija učitelja o usklađenosti izabranog udžbenika s točkama propisanog plana i programa (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Percepcija učitelja	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Da	1	25%	2	25%
Uglavnom da	2	50%	5	62,5%
Uglavnom ne	1	25%	0	0%
Ne	0	0%	1	12,5%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o usklađenosti izabranog udžbenika s točkama propisanog plana i programa. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 25% smatra kako je izabrani udžbenik usklađen s točkama propisanog plana i programa, 50% odgovorilo je kako je izabrani udžbenik uglavnom usklađen s točkama propisanog plana i programa, a 25% smatra kako izabrani udžbenik uglavnom nije usklađen s točkama propisanog plana i programa.

Tablica 32: Percepcija učitelja o zadovoljstvu izabranim matematičkim udžbenikom (N=12)

	Moj sretni broj (n=4)		Matematičkim stazama (n=8)	
Percepcija učitelja	Broj ispitanika	Postotak	Broj ispitanika	Postotak
Da	0	0%	2	25%
Uglavnom da	3	75%	4	50%

Uglavnom ne	0	0%	1	12,5%
Ne	1	25%	1	12,5%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o zadovoljstvu izabranim matematičkim udžbenikom. Od 4 učitelja koji se koriste udžbenikom *Moj sretni broj*, 75% odgovorilo je kako je uglavnom zadovoljno izabranim matematičkim udžbenikom, dok 25% nije. Od 8 učitelja koji se koriste udžbenikom *Matematičkim stazama*, 25% odgovorilo je kako je zadovoljno izabranim matematičkim udžbenikom, 50% je uglavnom zadovoljno, 12,5% uglavnom nije, a 12,5% nije.

Tablica 33: Percepcija učitelja o tri najvažnija kriterija koja dobar i kvalitetan udžbenik mora sadržavati (N=12)

Kriteriji	Broj ispitanika	Postotak
Usklađenost udžbenika s planom i programom	6	50%
Matematička točnost i korektnost	6	50%
Dobar odabir primjera i zadataka	10	83,33%
Primjerenost sadržaja dobi učenika	7	58,33%
Grafičko oblikovanje	1	8,33%
Metodičko oblikovanje	4	33,33%
Ime poznatog autora	0	0%
Nešto drugo	0	0%

U istraživanju je provjerena percepcija učitelja o tri najvažnija kriterija koja dobar i kvalitetan udžbenik mora sadržavati. Prema percepciji učitelja, tri najvažnija kriterija koja dobar i kvalitetan udžbenik mora sadržavati su (od najvažnijeg prema najmanje važnom): „Dobar odabir primjera i zadataka“ (83,33%), potom „Primjerenost sadržaja dobi učenika“ (58,33%), a posljednje mjesto dijele kriteriji „Usklađenost udžbenika s planom i programom“ (50%) i „„Matematička točnost i korektnost“ (50%). Najmanje važan kriterij je „Grafičko oblikovanje“ (8,33%) dok niti jedan učitelj ne percipira kriterije „Ime poznatog autora“ (0%) ili kriterij „Nešto drugo“ (0%) kao uopće važne.

9. ZAKLJUČAK

Dio rezultata istraživanja ovog rada je obrađen kvantitativno, a dio kvalitativno. Kvantitativna obrada rezultata je bila pomoću t – testa i hi – kvadrat testa. Kvalitativna obrada je bila prisutna kod obrade anketa među učiteljima te intervjua s učiteljicama.

Postavljene hipoteze su bile sljedeće. Očekivali smo različitu točnost i čestinu strategije za rješavanje matematičkih problema. U istraživanju je hipoteza potvrđena. Posebno smo obradili strategije učenika 3., 4. i 5. razreda.

U 3. razredu prilikom zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva najčešće koriste strategiju rastavljanja brojeva na D i J pri čemu su točniji u zadacima zbrajanja u odnosu na zadatke oduzimanja. U složenijim računskim operacijama najčešće se koriste strategijom zbrajanja parova pribrojnika napamet te strategijom zbrajanja/oduzimanja i dijeljenja napamet pri čemu su točniji u kombinaciji zbrajanja i dijeljenja u odnosu na kombinaciju oduzimanja i dijeljenja.

Učenici 4. razreda najčešće koriste strategiju pisanog računa pri čemu imaju jednako visoku prosječnu točnost u navedenim računskim operacijama. U složenijim računskim operacijama zbrajanje većeg broja pribrojnika i kombinacija zbrajanja/oduzimanja i množenja/dijeljenja najčešće koriste strategiju pisanog zbrajanja parova pribrojnika i strategiju kombiniranja pisanog zbrajanja i pisanog množenja ili dijeljenja pri čemu imaju otprilike jednaku prosječnu točnost dok se u zadnjem zadatku najčešće koriste strategijom pisanog oduzimanja i dijeljenja napamet.

Učenici 5. razreda najčešće koriste strategiju pisanog računa pri čemu najnižu prosječnu točnost imaju kod zadatka oduzimanja. U složenijim računskim operacijama učenici najčešće koriste strategiju povezivanja okruglih brojeva te strategiju pisanog oduzimanja i dijeljenja napamet kao i učenici 4. razreda s obzirom da je u zadatku korišten jednoznamenkasti broj za dijeljenje pri čemu u tom zadnjem zadatku imaju otprilike jednako visoku točnost.

Iz ovih rezultata možemo vidjeti razvoj dječjih strategija u nižim razredima osnovne škole. Učenici kreću sa strategijom rastavljanja brojeva na D i J. Kao što smo vidjeli u provedenim intervjuima s učiteljima, na ovaj način djeca puno lakše i brže dođu do rješenja. U 4. i 5. razredu ogromna većina učenika koristi strategiju pisanog računa, a mali dio računa napamet. Možemo zaključiti da većina učenika koristi jednake strategije rješavanja zadataka naučene ili podučavane od strane učitelja, a jako malo ih koristi osobne strategije.

Sljedeći problem je bio ispitati razlike (s obzirom na školu i spol) u točnosti rješavanja zadataka koristeći različite strategije računanja, a pretpostavili smo da će dječaci uspješnije koristiti različite strategije računanja od djevojčica pri zadacima različitih računskih operacija. Rezultati su pokazali da dječaci uspješnije koriste različite strategije računanja u odnosu na djevojčice pri zadacima različitih računskih operacija tj. imaju viši prosjek točnosti riješenosti zadataka.

Dječaci ukupnog uzorka 3. razreda u obje škole imaju višu prosječnu točnost od djevojčica iako je u pitanju korištenje iste strategije ovisno o zadatku, osim u slučaju zbrajanja većeg broja pribrojnika gdje su dječaci i djevojčice imali 100% točnost, a sve to ukazuje na činjenicu da dječaci efikasnije koriste strategije računanja različitih računskih operacija. A učenici 4. razreda na ukupnom uzorku obje škole najčešće koriste iste strategije računanja ovisno o zadatku.

Sljedeći problem je bio ispitati razlike s obzirom na spol u točnosti procjenjivanja točnog odgovora zadataka. Pretpostavili smo da će dječaci uspješnije procjenjivati točne odgovore od djevojčica pri zadacima različitih računskih operacija Pokazalo se da u točnosti procjenjivanja točnog odgovora u zadatku utvrđivanja razlika u cijeni između dva proizvoda te u zadatku utvrđivanja izgleda računa na cjelokupnom uzorku 5. razreda obje škole djevojčice su točnije procjenjivale točan odgovor u odnosu na dječake.

Već nekoliko spomenutih istraživanja u radu u vezi spolnih razlika je dalo slične rezultate. Rezultati su vrlo zanimljivi te smatramo da bi se ovaj problem mogao još istražiti. Sigurno bi bilo vrlo interesantno doći do uzroka uspješnijeg korištenja strategija dječaka nego djevojčica te zašto se pokazalo da djevojčice imaju bolju procjenu od dječaka.

I za posljednji problem se očekivalo da se većina učitelja/ica razredne nastave vodi propisanim sadržajem i planom korištenog udžbenika za nastavu matematike prilikom organiziranja i provođenja nastavnog sata iz matematike. Rezultati anonimne ankete su pokazali sljedeće. Učitelji se većinom koriste udžbenikom pri pripremi za nastavu, slijeđenju pojedinih tema, korištenjem matematičkog jezika i simbola, zadavanja zadataka učenicima za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke, kod učestalosti biranja zadataka za provjeru znanja, a rjeđe pri objašnjavanju nove nastavne teme, vježbanju zadataka i doslovnog korištenja riješenih primjera. U istraživanju je također provjerena percepcija učitelja o logičkoj povezanosti nastavnih tema u izabranom udžbeniku. Većina učitelja je odgovorila kako uglavnom percipiraju da su nastavne teme u izabranom udžbeniku logički povezane, većina smatra da su nastavne teme u izabranom udžbeniku dobro organizirane i da pridonose dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja te misli da je izabrani udžbenik uglavnom usklađen s točkama propisanog plana i programa. Učitelji su uglavnom zadovoljni izabranim matematičkim udžbenikom. A tri najvažnija kriterija koja dobar i kvalitetan udžbenik mora sadržavati učitelji smatraju da su: dobar odabir primjera i zadataka, primjerenost sadržaja dobi učenika te usklađenost udžbenika s planom i programom uz matematičku točnost i korektnost. S obzirom na većinsko korištenje udžbenika u pripremi za nastavu, postavlja se pitanje slobode i kreativnosti u nastavi matematike. Svakako da neka znanja iz matematike učenicima moraju biti prikazani kakvima uistinu jesu, ali da li put do usvajanja matematičkih pravila mora biti baš uvijek demonstriran frontalnim radom gdje učitelj vodi glavnu riječ? Smatramo da je zalaganje učitelja u kreiranju zanimljive i korisne nastave matematike vlastitim materijalima i idejama svakako poželjno za bolje usvajanje i korištenje znanja o brojevima. Prezentirano na taj način mislimo da će djeca moći prepoznati i znati koristiti osjećaj o brojevima te tako stvoriti osobnu strategiju za rješenje problema u bilo kojem trenutku.

10. LITERATURA

- Armstrong, G. A. 1991. Use of the part-whole concept for teaching word problems to grade three children (Doctoral dissertation, National College of Education, 1990). *Dissertation Abstracts International*, 52(03), 833A.
- Atweh, B. 1982. Developing mental arithmetic. In S. Silvey & J.R. Smarts (Eds), *Mathematics for the Middle grades (5-9).* NCTM Yearbook, 50-58.
- Baek, J.-M. 1998. Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 151–160). Reston, VA: NCTM.
- Baranes, R., Perry, M., Stigler, J. 1989. Activation of real-worl knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, 6, 287-318.
- Baroody, A. J. 1984a. Children's difficulties in subtraction: Some causes and cures. *Arithmetic Teacher*, 32(3), 14–19.
- Baroody, A. J. 1984b. The case of Felicia: A young child's strategies for reducing memory demands during mental addition. *Cognition and Instruction*, 1, 109–116.
- Baroody, A. J. 1999a. Children's relational knowledge of addition and subtraction. Cognition and Instruction, 17, 137–175.
- Baroody, A. J. 1999b. The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third-graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, Special issue on mathematical cognition, 157–193.
- Bisanz, J., Dunn, M. 1995. Effects of age and schooling on the acquisition of elemenatry quantitative skills. *Developmental psychology*, 31, 221-237.
- Boulton-Lewis, G.M., Tait, K. 1994. Young children's representations and strategies for addition. *British Journal of Educational Psychology*, 64, 231-242.
- Brownell, W. A. 1935. Pshychological considerations in the learning and teaching arithmetic. In W. D. Reeve (Ed). *The teaching of arithmetic* (10th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-31). New York: Columbia University , Teachers College Publications.
- Brownell, W. A. 1987. AT classic: Meaning and skill—maintaining the balance. *Arithmetic Teacher*, 34(8), 18–25. (Original work published 1956)
- Butterworth, B. 2010. Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), 534–541.
- Carey, S. 2004. Bootstrapping & the origin of concepts. *Daedalus*, 133(1), 59–68.
- Carey, S. 2009. The origin of concepts. New York: Oxford University Press.
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. 1993. Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428–441.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L. 1996. Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *Elementary School Journal*, 97, 3–20.

- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., Empson, S. B. 1999. Children's mathematics: Cognitively guided instruction. Heinemann, Portsmouth, NH.
- Carpenter, T. P., Moser, J. M. 1984. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15, 179–202.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P. L. 1989. Using Knowledge of Children’s Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study.
- Carraher, T.N, Carraher, D.W., & Schliemann, A.D. 1985. Mathematics in the streets and in the schools. *British Journal of Developmental Pshychology*, 3, 21-29. (3.12.2018)
- Carroll, J. 1992. Mental computation, estimation and number sense. *Prime number*, 7, (2), 4-5.
- Carroll, W. M., & Porter, D. 1998. Alternative algorithms for whole-number operations. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp 106–114). Reston, VA: NCTM.
- Dehaene, S. 2011. The number sense: How the mind creates mathematics. New York: Oxford University Press.
- Dewey, J. 1916. Democracy and education. New York: Macmillan Co. 89-90.
- Dewey, L. 1938. Philosophy of Education: Problems of Men. Paterson, New Jersey: Littlefield, Adams & Co. 48-49.
- Dowker, A. 1992. Computation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education* 23: 45-55.
- Elofsson, J. 2017. Children’s early mathematics learning and development: Number game interventions and number line estimations. Linköping Studies in Behavioural Science No. 199 Faculty of Educational Sciences Linköping.
- Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. 2002. The representations underlying infants’ choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13(2), 150–156.
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. 2004. Core systems of number. *TRENDS in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.
- Feigenson, L., & Carey, S. 2005. On the limits of infants’ quantification of small object arrays. *Cognition*, 97(3), 295–313.
- Fuson, K. C. 1986. Teaching children to subtract by counting up. *Journal for Researchin Mathematics Education*, 17, 172–189.
- Fuson, K. C. 1992a. Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds), *The analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 53–187). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Fuson, K. C. 1992b. Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243–275). New York: Macmillan.
- Fuson, K. C., & Secada, W. G. 1986. Teaching children to add by counting-on with onehanded finger patterns. *Cognition and Instruction*, 3, 229–260.

- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130–162.
- Ginsburg, H. P., Inoue, N., & Seo, K. H. 1999. Young children doing mathematics: observations of everyday activities. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 88-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.)
- Gopnik A., Sobel D. M., Schulz, L. E., & Glymour, C. 2001. Causal learning mechanisms in very young children: Two-, three-, and four-year-olds infer causal relations from patterns of variation and covariation. *Developmental Psychology*, 37(5), 620-629.)
- Glasnović Gracin, D., Domović, V. 2009. Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole. *Odgojne Znanosti* . Dec2009, Vol. 11 Issue 2, p297-317. 21p. 25 Graphs.
- Greenes, C., Schulman, L., Spungin, R. 1993. Developing sense about number. *Arithmetic Teacher*. 279-284.
- Grouws, D. A. (Ed). 1992. Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.
- Hadamard, J. 1945. An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical field. Princeton, N. J.: Princeton University Press.
- Harris, B., Petersen, D. 2017. Developing Math Skills in Early Childhood. *Issue BRIEF*. Mathematica.
- Hope, J.A. 1986. Mental calculation: Anachronism or basic skill? In H.L. Schoen & M.J.
- Hope, J.A. & Sherrill, J.M. 1987. Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal of Research in Mathematics Education*, 18, (2), 98-111.
- Howden, H. 1989. Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 3686), 6-11.
- Hyde, J.S., Fennema, E., Lamon S.J. 1990. Gender differneces in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107, 2, 139-155
- Hyde, D. C., & Spelke, E. S. 2011. Neural signatures of number processing in human infants: Evidence for two core systems underlying numerical cognition. *Developmental Science*, 14(2), 360–371.
- Institute of Medicine (IOM) & National Research Council. 2015. Transforming the workforce for children birth through age 8: A unifying foundation. Washington, DC: *The National Academies Press*.
- Janzen, J. 2008. Teaching English language learners. *Review of Educational Research*, 78, 1010-1038.
- Jelavić, F. 2008. *Didaktika.* Naklada Slap. Jastrebarsko.
- Jerman, M. 1970. Some strategies for solving simple multiplication combinations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 95–128.
- Jones, P. 1988. Mental mathematics moves ahead. *Mathematics in School.*

- Jones, K., Kershaw, L., & Sparrow, L. 1994. *Number sense and computation in the classroom.* Mathematics, Science and Technology Education Centre, Edith Cowan University, Perth, Australia.
- Kamii, C. 1989. Young children continue to reinvent arithmetic—2nd grade: Implications of Piaget's theory. New York: *Teachers College Press*.
- Kipping, P., Gard, A., Gilman, L., and Gorman, J. 2012. Speech and language development chart (3rd ed.). Austin, TX: Pro-Ed.
- Kintsch, W., Greeno, J.G. 1985. *Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological review,* 92, 1, 109-129.
- Kouba, V. 1989. Children's solution procedures for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 147–158.
- Krogh, L.S. 1994. Educating young children - Infancy to grade three. New York: McGraw-Hill.
- Lampert, M. 1992. Teaching and learning long division for understanding in school. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds), *The analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 221–282). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Liebeck, P. 1990. *Kako djeca uče matematiku.* Zagreb: Educa.
- Lindberg, S.M., Hyde, J.S., Petersen, J.L., Lynn, M.C. 2010. New trends in gender and mathemaics performance: A Meta-analysis. *Psychological Bulletin,* 136, (6), 1123-1135
- Maccoby, E.E, Jacklin, C.N. 1974. *The psychology of sex differences.* Stanford: Universitiy Press.
- Maier, E. 1980. Folk Mathematics. *Mathematics teacher*. 93, 21-24.
- Marshall, S.P., Smith, J.D. 1987. Sex differeneces in learning mathematics: A longitudinal study with item error analyses. *Journal of Educational Psychology,* 79(4), 372-383
- Markovits, Z., & Sowder, J. 1994. Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 4–29.
- Matkina biblioteka. 2000. *Standardi za nastavu matematike.* Zagreb: HMD, V. gimnazija.
- McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E. 1992. *A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense*.
- McIntosh, A. i drugi. 1995. *Mental computation in School Mathematics: Preference, Attitude and Performance of Students in Years 3,5,7 and 9.* Science and Technology Education Centre, Edith Cowan University, Perth, Australia.
- McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Farrell, B. 1997. Number sense in school mathematics: student performance in four countries. Edith Cowan UniversityResearch Online. ECU Publications Pre. 2011.
- Miklec, D., Jakovljević Rogić, S., Prtajin, G. 2016. *Moj sretni broj 2.* Školska knjiga.
- Miklec, D., Jakovljević Rogić, S., Prtajin, G., Binder, S., Mesaroš Grgurić, N., Vejić, J. 2017. *Moj sretni broj 3.* Školska knjiga.
- Miklec, D., Jakovljević Rogić, S., Prtajin, G., Binder, S., Mesaroš Grgurić, N., Vejić, J. 2010. *Moj sretni broj 4*. Školska knjiga.

- Ministarstvo znanosti i obrazovanja. 2017. Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta matematika.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. 1997. Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 309–330.
- National Research Council. 2009. Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity. Washington, DC: *The National Academies Press*.
- Paić, G., Manzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N. 2013. *Matematičkim stazama 2*. Školska knjiga.
- Paić, G., Manzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N. 2014. *Matematičkim stazama 3*. Školska knjiga.
- Paić, G., Manzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N. 2014. *Matematičkim stazama 4*. Školska knjiga.
- **Pavlin-Bernardić, N, 2006. Modeli dječjeg odabira strategija rješavanja aritmetičkih zadataka.** *Suvremena psihologija*, Vol. 9 No. 1.
- Plunkett, S. 1978. Decomposition and all that rot. *Mathematics in Schools*, 8 (3), 2-5
- Piaget, J. 1973. The understand in to invent. (George Roberts, Trans) New York: Grosman Publishers. str. 15.
- Piaget, J. 1968. La autonomia en la escuela. (M. L. Navarro de Luzuriaja, Trans) Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada, S. A.
- Piaget, J. 1979. The Child's Conception of the World. (J. & A. Tomlison, Trans). New Jersey: Littlefield, Adams & Co.
- Piazza, M. 2010. Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), 542–551.
- Resnick, L. B. 1983. A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking* (pp. 110–152). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Resnick, L.B. 1989. Defining, assessing, and teaching number sense. In J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (str. 350-359) San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Resnick, L. B., & Ford, W. W. 1981. The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. Journal for Research in Mathematics Education, 13, 183–201.
- Reys, R. 1984. Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84, (5), 547 - 557.
- Reys, B. J., Reys, R. E. 1986. Teaching computation estimation: Concepts and strategies. In „*Estimation and mental computation: 1986. Yearbook*" (H.L. Schoen and M . J. Zweng , eds) pp. 31-44. National Council of teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

- Rivera, L., M. 1996. The effect of mental computation instruction on third grade mathematics students. Teachers College, Columbia University.
- Riley, M.S., Greeno, J.G., Heller, J.J. 1983. Development of children's problem solving ability in arithmetic. U: Ginsburg, H.P. (ur) *The development of mathematical thinking,* New York: Academic Press.
- Romberg, T. A. 1969. Current research in Mathematics Education. *Review of Educational Research*, 39, 473-491.
- Rubenstein, R. N. Computational Estimation and Related Mathematical Skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 16, No. 2 (Mar., 1985), pp.106-119, published by National Council of Teachers of Mathematics.
- Russel, S. J. Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Children Mathematics* 7 no3, 2000, 154.-158.
- Sarama, J., & Clements, D. H. 2009. Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. New York: Routledge.
- Saxe, G.B. 1988. The mathematics of child street vendors. *Child development,* 59, 1415-1425.
- Schoenfeld, A. H. 1991. On mathematics as sensemaking: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds), *Informal reasoning and education* (pp. 311-344). Hillsdale NJ: Erlbaum.
- Seo, K. H., & Ginsburg, H. P. 2004. What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? In D. H. Clements, J. Sarama, and A. M. DiBaise (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 91-104). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Silver, E.A. 1986. *Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationship*.
- Silver, E.A. 1989. On making sense of number sense. In J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (str. 350-359) San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Sowder, J. & Sowder, L. (Ed) 1989. Research into practice. *Artihmetic Teacher*, 36, (6), 53-56.
- Sowder, J. 1992. Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan Publishing Company.
- Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. 1989. The development of concepts and procedures used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 130–146.
- Spelke, E. S. 2000. Core knowledge. *American Psychologist,* 55(11), 1233–1243.
- Stevanović, M. 2003. *Nastavnik umjetnik odgajatelj*. Sveučilište u Rijeci. Znanstvena biblioteka, knjiga 17. Tonimir, Varaždinske Toplice.
- Thorndike, E. L. 1992. *The psychology of arithmetic*. New York, New York: Macmillan.

- Thornton, C. A. 1978. Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 214–227.
- U.S. Department of Education. 2008. *The Final Report of the National Mathematics Advisroy Panel.*
- Usiskin, Z. 1978. Reasons for estimating. In D. A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathemtics teaching and learning.* New York: Macmillan Publishing Company.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. 1997. Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.
- Van de Walle, G. A., Carey, S., & Prevor, M. 2000. Bases for object individuation in infancy: Evidence from manual search. *Journal of Cognition and Development*, 1(3), 249–280.
- von Aster, M., & Shalev, R. S. 2007. Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 49, 868–873.
- Vizek-Vidović, V., Vlahović-Štetić, V., Rijavec, M., Miljković, D. 2014. *Psihologija obrazovanja.* Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. IEP-Vern, Zagreb.
- Wandt, E., Brown, G. W. 1957. Non-occupational uses of mathematics: Mental and written - approximate and exact. *Arithmetic Teacher*, 4 (4), 151-154.
- Wynn, K. 1992. Children’s acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220–251.
- Xu, F., & Spelke, E. S. 2000. Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74(1), 1–11.
- Xu, F. 2003. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, 89(1), 15–25.
- Xu, F., Spelke, E. S., & Goddard, S. 2005. Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8(1), 88–101.

11. ŽIVOTOPIS

Osobni podaci

- Ime i prezime: Božena Damjanović
- Datum i mjesto rođenja: 27.12.1994., Zadar, Hrvatska
- email: bozena27.zd@gmail.com

Obrazovanje

- Studentica pete godine Sveučilišta u Zadru; jednopredmetni integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij, Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja (godina upisa: 2013.)
- Jezična gimnazija Vladimira Nazora, Zadar (2009. - 2013.)
- Osnovna škola Bartula Kašića, Zadar (2001. – 2009.)

Radno iskustvo:

- dm - drogerie markt, Zadar (2015. – 2019.)
- Graditelj Svratišta, Petrčane, Zadar (2015.)
- RMC agencija (2014.)

Vještine

- Položen B2 stupanj engleskog jezika u Centru za strane jezike, Sveučilište u Zadru
- Položen B2 stupanj njemačkog jezika u Centru za strane jezike, Sveučilište u Zadru
- Položen A2 stupanj francuskog jezika u Centru za strane jezike, Sveučilište u Zadru
- Vozačka dozvola B kategorije
- Iskustvo rada na računalu: Microsoft Office, Internet

12. POPIS TABLICA

13. POPIS ILUSTRACIJA

14. PRILOZI

Prilog 1: ispiti za učenike

Škola: ____

Spol: M Ž

3. RAZRED

1.) 46 + 14
2.) 20 + 35
3.) 76 - 25
4.) 93 - 69
5.) 12 + 25 + 8 +5
6.) 80 : 0
7.) (52 + 29) : 9
8.) (86 – 23) : 7

Škola: ____

Spol: M Ž

4. RAZRED

1.) 556 + 374
2.) 746 - 275
3.) 5 · 49
4.) 7 · (50 + 49)
5.) 312 + 125 + 48 + 35
6.) 400 : 0
7.) (652 + 329) : 9
8.) (87 – 39) : 8

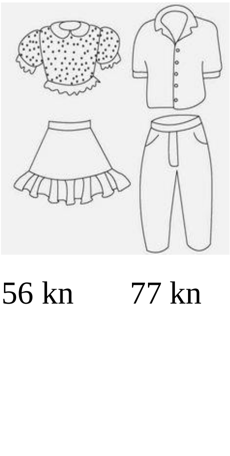
9.) **Bez računanja,** što misliš koji je umnožak najveći? Zaokruži.

82 · 3 58 · 6 33 · 9 63 · 7

10.) **Bez računanja,** koliko otprilike koštaju svi ovi komadi odjeće zajedno?

____

38 kn 45 kn



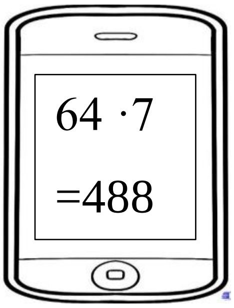
56 kn 77 kn

11.) **Bez računanja,** ovaj račun izgleda:

a) Točno

b) Netočno

c) Ne znam



12.) **Bez računanja, r**azlika u cijeni između ova dva proizvoda je:

a) Preko 30 kn

b) Ispod 30 kn

c) Ne znam

462 kn  436 kn

Škola:____

Spol: M Ž

5. RAZRED

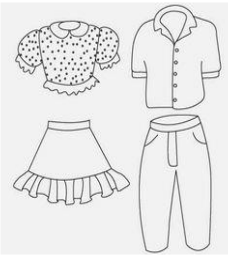
1.) 4 956 + 6 374
2.) 145 500 - 79 845
3.) 45 000 : 150
4.) 999 · 9
5.) 1 200 + 8 500 + 350 + 2 800 + 500 + 150
6.) 40 000 : 0
7.) 7 · 49
8.) (87 – 39) : 8

9.) **Bez računanja**, što misliš koji je umnožak najveći? Zaokruži.

8 264 · 38 5 849 · 63 3 345 · 92 6 343 · 72

10.) **Bez računanja**, koliko otprilike koštaju svi ovi komadi odjeće zajedno?

38 kn 45 kn



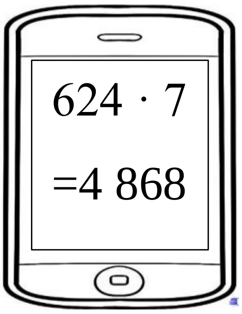
56 kn 77 kn

11.) **Bez računanja**, ovaj račun izgleda:

a) Točno

b) Netočno

c) Ne znam



12.) **Bez računanja** , razlika u cijeni između ova dva proizvoda je:

a) Preko 30 kn

b) Ispod 30 kn

c) Ne znam

5 436 kn   5 462 kn

Prilog 2: anketa za učitelje

Anketa za učitelje razredne nastave
Upotreba matematičkih udžbenika tijekom nastave u nižim razredima osnovne škole

Poštovani učitelji,

Pred Vama se nalazi anketa o ispitivanju stavova o upotrebi udžbenika na nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. Anketa je dio diplomskog rada pod nazivom „Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole“ pod autorstvom studentice Božena Damjanović. Anketa je kreirana s ciljem da se utvrdi mišljenje učitelja o školskim udžbenicima koji su propisani za rad s učenicima jer ipak oni iz prve ruke vide njihove prednosti i nedostatke. U anketi će se ispitati učitelji razredne nastave u zadarskim osnovnim školama Bartul Kašić i Kruno Krstić u školskoj godini 2018./2019. Anketa je potpuno anonimna i svi podaci će se obraditi isključivo u svrhu diplomskog rada.

Molim Vas da odvojite malo vremena i iskreno odgovorite na sljedeća pitanja. Zahvaljujem na suradnji!

Molim, zaokružite tvrdnje koje se odnose na Vas.

Učitelj/ica sam: 1. 2. 3. 4. razreda.

Udžbenik koji koristim na nastavi je: *Moj sretni broj* *Matematičkim stazama*

	1- nikad	2 – rijetko	3 – često	4 – gotovo uvijek
1. Prilikom pripreme za nastavu, oslanjam se na izabrani udžbenik.	1	2	3	4
2. Prilikom pripreme za nastavu, oslanjam se na pripadni priručnik.	1	2	3	4
3. Prilikom pripreme za nastavu, oslanjam se na druge udžbenike.	1	2	3	4
4. Prilikom pripreme za nastavu, oslanjam se na druge materijale.	1	2	3	4
5. Na nastavnom satu slijedim strukturu pojedine teme iz udžbenika.	1	2	3	4
6. Tijekom školske godine predviđam slijed nastavnih tema točno prema njihovom slijedu u udžbeniku.	1	2	3	4

7. U nastavi koristim definicije i teoreme u istom obliku kako su napisani u udžbeniku.	1	2	3	4
8. U nastavi koristim matematički jezik i simbole koji se koriste u izabranom udžbeniku.	1	2	3	4
9. Novu temu učenicima objasnim na isti način kao što je objašnjeno u udžbeniku.	1	2	3	4
10. Za motivaciju prilikom uvoda u novu temu ili lekciju koristim sadržaje iz udžbenika.	1	2	3	4
11. U nastavi doslovno koristim riješene primjere iz udžbenika.	1	2	3	4
12. U nastavi koristim riješene primjere iz udžbenika, ali ne doslovno.	1	2	3	4
13. Zadatke za vježbanje odabirem iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke.	1	2	3	4
14. Zadatke za vježbanje smišljam sam/a.	1	2	3	4
15. Zadatke za vježbanje odabirem iz drugih izvora.	1	2	3	4
16. Moji učenici dobivaju zadatke za domaću zadaću iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke.	1	2	3	4
17. Oslanjam se na zadatke iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke prilikom ponavljanja pred ispit znanja.	1	2	3	4
18. Zadatke za provjeru znanja odabirem po uzoru na one iz udžbenika, radne bilježnice ili zbirke.	1	2	3	4
19. Pri usvajanju novog gradiva koristim frontalni rad.	1	2	3	4
20. Pri usvajanju novog gradiva učenici samostalno ili u grupi usvajaju gradivo iz udžbenika.	1	2	3	4

Nastavne teme u izabranom udžbeniku su logički povezane.	da	uglavnom da	uglavnom ne	ne
Smatram da izabrani udžbenik ima dobru organizaciju nastavnih tema.	da	uglavnom da	uglavnom ne	ne
Smatram da izabrani udžbenik pridonosi dobrom povezivanju prethodno stečenog i novog znanja.	da	uglavnom da	uglavnom ne	ne
Smatram da izabrani udžbenik zadovoljava sve točke propisane planom i programom.	da	uglavnom da	uglavnom ne	ne
Zadovoljan/na sam izabranim matematičkim udžbenikom.	da	uglavnom da	uglavnom ne	ne

Smatram da su 3 najvažnija kriterija koji dobar i kvalitetan udžbenik mora sadržavati:

a) Usklađenost udžbenika planom i programom

b) Matematička točnost i korektnost

c) Dobar odabir primjera i zadataka

d) Primjerenost sadržaja dobi učenika

e) Grafičko oblikovanje

f) Metodičko oblikovanje

g) Ime poznatog autora

h) Nešto drugo: ____

Prilog 3: transkripcija intervjua sa učiteljicama

1. **Intervju je proveden sa učiteljicom 4. razreda (Učiteljica 1)**
   a. Kako poučavate učenike računanju? Dakle, prije pisanog računa, na koji način učenici zbrajaju, oduzimaju, množe i dijele? Koje strategije ste koristili pri poučavanju? Kako poučavate pisani račun?

U prvom i drugom razredu najvažnija strategija je nekakvi konkreti. Jer učenici u toj dobi teže shvaćaju pojam broja i količine. Znači, kada imaju ili brojevnu crtu , ili prstiće, ili štapiće, kuglice, bilo što što imamo, oni na takav način puno brže i puno jednostavnije shvate i odnose među brojevima, i manji i veći, koji je naprijed, koji je nazad, dakle njihov položaj na brojevnoj crti. Dok u višim razredima, 3. i 4. razred, kada radimo brojeve do tisuću, u 4. do milijun, ne možemo se više služiti takvima. Onda se više služimo rastavljanjem brojeva i nekakvim pojednostavljenjem zadataka. Dakle, ako imamo pisano množenje, u početku dok shvate, pisano množenje brojeva: rastavimo broj 125•6, rastavimo na 100•6+20•6+5•6. Na takav način oni to puno lakše i puno brže shvate.

   b. Jeste li naišli na učenike koji imaju neki svoj poseban način računanja? Jeste li ih usmjeravali na način da ih ohrabrujete u tome da ga i dalje koriste i razvijaju?

Imam učenike koji na prethodno opisan način računaju već u 3. razredu i dvoznamenkaste brojeve. Dakle ima učenika koji imaju posebne sisteme. Imaju sisteme računanja u kojima se ne koriste niti konkretama niti brojevnim crtama niti onim ostalim čime radimo, nego imaju neke svoje sisteme u svojoj glavi. Ja ih u tome ne sprječavam. Potičem ih da na takav način dokle god su uspješni znači da je to ispravno, da takav način na koji rade, da tako nastave i dalje. Uglavnom su to učenici koji imaju baš dobro razvijano matematičko mišljenje i kasnije se pokaže, krajem trećeg, početkom četvrtog da im je matematika nekakva jača strana.

   c. Pratite li strategije računanja iz udžbenika ili imate svoj način rada?

Pa koristim se udžbenicima, priručnicima i trudim se održati nekakav redoslijed kao što je u udžbeniku. Pratim plan i program sve kako ide. Rijetko kad nešto preskačem, iako se ne zadržavam na svakom dijelu možda onoliko koliko je to predviđeno priručnikom nego u praksi vidim što im je teže, što im je teže, gdje zapinju i s tim se bavim duže, neovisno o tome koliko je to planirano. Dakle, ne mičem se sa nekog sadržaja koji je predviđen udžbenikom možda jedan sat, ja se možda ne mičem 5,6,7 sati, koliko god treba dok ne vidim da su učenici savladali. Koristim se udžbenicima, pratim sve, ali kažem jednostavno sama određujem koliko će to vremenski trajati.

   d. Vježbate li s učenicima usmene strategije računa koje bi im bile korisne u svakodnevnom životu, npr. u trgovini?

Da. Nekako se više fokusiram na to kada dođe drugo polugodište 3. razreda zato što onda postaju sposobniji za to. U nižim razredima su to mali brojevi, no kada dođe kraj trećeg *i početak četvrtog razreda, onda već koristimo neke ozbiljnije zadatke, kako bih rekla, u kojima stvarno moraju dobro pratiti zadatak, raščlaniti ga na više jednostavnih faza da bi mogli uopće shvatiti o čemu se radi, i više se s tim možda bavim na dodatnim satima matematike, dok na redovnim satovima matematike, to koristim u jednom postotku, ne previše, ali opet ni ne preskačem.*

2. Intervju je proveden sa učiteljicom 3. razreda (Učiteljica 2)

a. *U prvom i drugom razredu se najčešće koristim konkretima i raznim matematičkim igrama, koristim matematički memory , tražim razne stranice na internetu na kojima mogu što kreativnije poučavati da im bude zabavno, a kasnije već u trećem i četvrtom razredu, pri pisanom zbrajanju i oduzimanju, prvo rješavamo zadatke u tablicama mjesnih vrijednosti da djecu upoznam uopće sa pojmovima što su to jedinice, desetice, stotice i važnost potpisivanja brojeva u stupce. Nakon toga krećemo na konkretne brojčane zadatke izvan tablice.*

b. *Naravno, u svakoj generaciji se nađe barem dvojica, trojica takvih učenika i budem sretna kad vidim da imam uopće takvo dijete u razredu. Dapače, uvijek potičem drugačiji način računanja i kad rješavamo nekakav problemski zadatak, onda više učenika dođe na ploču pokazati na koji je način riješilo zadatak i uvijek ih nekako motiviram za taj rad da rješavaju na svoj način, mada govorim im i da moraju poštovati nekakva matematička pravila pri rješavanju zadataka, ali način na koji oni dolaze do rješenja, ako je originalan, ja ga potičem.*

c. *Imam svoj način rada. Jer često vidim da mi ne odgovara način koji je prikazan u udžbeniku. Uvijek prvo riješimo zadatak na ploči, frontalno s učenicima na svoj način, a nakon toga nam udžbenik posluži za ponavljanje, vježbanje, nekad čak niti to.*

d. *Naravno, i stalno im ponavljam koliko je matematika važan predmet i da bez nje ne možemo funkcionirati u svakodnevnom životu. U prvom i drugom razredu smo se najviše bavili tim matematičkim igrama, onda su vidjeli, na primjer u trgovini, eto baš igrali smo se trgovine, prodaje, kupnje, to im je bilo zabavno, i kroz matematičke priče isto tako vide da ako ne znaju matematiku jednostavno ne mogu neke stvari u životu koristiti i izračunati.*

3. Intervju je proveden sa učiteljicom 3. razreda (Učiteljica 3)

a. *Kako poučavam? Pa poučavam dijete ovisno o uzrastu koji je. Naravno da ne možemo iste metode koristiti u sva četiri razreda. Kad krenem od malih prvaša onda, što mi je najbitnije, krenem od zornog prikaza, dakle koristim što više raznoraznih materijala, od geometrijskih tijela, od likova, od kojekakvih konopa, konopčića kad radimo crte, ovakve, onakve, od kutija, od otvorenih zatvorenih, znači taj dio matematike: odnosi među predmetima, veličine, veći, manji, jednaki, koristim najčešće praktičnu nastavu, počevši viši-niži, kad njih poredam tko je viši , tko je niži, jako je bitno da učenik vizualizira, ono što gleda kroz brojku. Odnosno taj pojam broja, količine, međusobnih odnosa brojeva, to pokazujem na taj način. Onda naravno proporcionalno kako rastu oni, kako matematički sazrijevaju, tako uvodim i manje tih igara, prelazimo na nekakvu konkretnu matematiku. Ono što inzistiram u radu matematike je da učenici rade naravno matematiku sa razumijevanjem, dosta izvodim učenike pred ploču i ono "po starinski" tražim da mi* *govore što rade. Znači, da svaki korak kojeg rade, da oni govore i da ja zapravo na taj način čujem, vidim, da li zapravo dijete razumije ili je ono samo automatiziralo neko svoje znanje, kao recimo tablicu množenja koju, često puta znamo svi, automatiziraju, a teško je onda primijeniti u nekom brojevnom izrazu u praksi. Metode u matematici koristim više, ovisno o naravnu tipu zadatka; da li su to brojevni izrazi, zadaci riječima, problemski zadaci, mozgalice, to je široko područje.*

b. *Da, drago mi je kad učenik izračuna zadatak na neki nazovimo svoj način. Bez obzira što matematika ima neke svoje uhodane korake, ali neke stvari treba forsirati, potencirati, ali negdje treba kao i u svakom području dati učeniku i tu neku slobodu i u matematici i da učenik, ako je on došao do rješenja nekom svojom logikom, naročito tamo u trećem i četvrtom razredu se može itekako dobiti, to uvažavam i to bodujem ako je to nešto za ocjenu, za bod, tome svakako dajem nekakav bod. Tu su uvijek po natjecanjima debate oko toga da li to bodovati ili ne, čak i stručnjaci koji se time su podijeljenog mišljenja. Moj stav je taj da bez obzira kojim putem je učenik došao do rješenja, da je taj put ispravan. Nitko ne kaže da je onaj tko to nama plasirao, to što je on rekao, da je to najbolje. Ja mislim da je najbolje ono što je točno, pa sad dajmo djetetu da… To bi trebala biti i intencija da dijete logički razmišlja, a ne da matematiku rješava po nekim šablonama, što na kraju krajeva smo ih mi rješavali kad smo išli u školu i evo sad i ova djeca. Eto taj šablonski način; zalijepi formulu i sad uvrsti, izračunaj i to je to. Tako da zajedničkim rječnikom rečeno, metode su kombinirane, ovisno o uzrastu, temi, materijalu i djeci koje imaš ispred sebe, prilagođavaš. Ne možemo ništa definirati kao nešto generalno, bitno je ono što imam ispred sebe, 26 učenika, 26 glavica, pa sad, snalazim se.*

c. *Kombiniram. Udžbenik mi nije ono što bi rekli "sveto pismo". Moram reći da mi godine mog iskustva, 33, bilo bi žalosno da se držim strogo udžbenika. Udžbenik mi je jedan putokaz da znam gdje sam sa sadržajem, sa gradivom, pratim mjesečni moj program koji moram pratiti i kojeg naravno poštujem, uvažavam, ali imam i svoje zadatke, stare, kako kažu moji učenici: "One zadatke učiteljice sa laptopa, oni su najgori", to su moji zadaci koji su dobiveni iskustvom mojih kolegica, ne samo mene i te zadatke isto koristim dosta u svom radu. Oni su mi naročito korisni za djecu koja su mi malo viših sposobnosti jer ovi udžbenici koje mi imamo su uglavnom prilagođeni za prosječne, a u razredu imate više kategorija učenika. Tako da, zaključak: udžbenik da, ono što je ponuđeno u udžbeniku da, ali moj prostor za moju matematiku i za moje zadatke također da. Tako da kombiniram.*

d. *Vježbamo, da, dosta radimo tih nekih životnih priča. Zadatke baš onako iz života. Neki dan smo razgovarali konkretno o kreditima. Što su to krediti i što su to kamate. Baš smo tako htjeli, na neki njima jasan način, pojmove prvo objasniti. Ali djeca dolaze iz obitelji gdje imaju kredit. Ne znam postoji li neka obitelj koja nema kredit i da ne plaća kamate. Tako da im je to sve bilo teoretski jasno. Onda smo to morali malo pojednostaviti, da ja to njima približim, što to je. Često imamo priče iz trgovina, što je isto djeci dosta blisko. Premda, ovim generacijama sad i ne toliko. Jer danas roditelji uglavnom idu u šoping centre, u kupovine, idu u velike "spize" i malo djece "skoči u dućan da kupi dvije litre mlijeka i kilo krumpira", tako da to ispadne da djeca danas malo idu u trgovine. Tako da je sve to stvar trenutka, ali radimo neke praktične situacije gdje vidimo da ne možemo bez matematike. Ja još radim matematiku pomoću japanske računaljke abakus. Uvela sam to prošle godine u školu. I moji učenici su druga godina računanja na abakus sorobaru. Ove godine su se kolegice učiteljice zainteresirale pa upravo i njih obučavamo da i one krenu* *tako da je to isto jedan jako koristan način učenja matematike. Dakle, na toj maloj spravici, naoko igrački, ali zapravo jako moćnoj abakus sorobar u Bartulu Kašiću. Tako da svašta radimo.*

4. Intervju je proveden sa učiteljicom 4. razreda (Učiteljica 4)

a. *Kod bilo koje obrade novog gradiva cilj nam je povezati ono staro što im je poznato od prije. Tako da ja vrlo često napišem "Poznato" pa primjer onoga što nam je poznato i onda "Novo" ili "Naučimo". Onda se sjete što smo radili, kad vide neku poveznicu. Jer kad znaju množiti dvoznamenkaste brojeve sa jednoznamenkastim, onda logično kad riješe taj zadatak, neće im bit puno teže troznamenkasti broj pa zatim i četveroznamenkasti. I ako znaju tablicu množenja onda to koliko znamenki ima nije presudno. A prva dva razreda su sami konkreti. Brojevi do 5; puste kombinacije, materijali, nešto opipljivo. Drugi razred isto koliko se može. Imamo i brojevnu crtu, pa na njoj radimo, zbrajaju sa lukovima. Pokušavam to predočiti da oni imaju taj osjećaj, da ti brojevi nisu nešto apstraktno. Također radimo i rastavljanje brojeva, oblik kao usmeni račun. Manje brojeve znaju napamet.*

b. *Svakako. Bilo koji njihov način razmišljanja koji je ispravan, ne očekujem da bude ukalupljen. Ako on ima svoj put da dođe do rješenja, to je u redu, dokle god je točno rješenje. Ako vidim da on tako funkcionira, da je to njegov način koji je lakši, zašto ne. I točan naravno, to je prvenstveno. Ako vidim da se gubi u tom, da je tren jedno, tren drugo, vratit ćemo se na ovo, dakle svi prođemo ono kako jest, ali kad se već oni malo uhodaju, onda pronalaze svoje načine, njima lakše.*

c. *Pa zapravo radi njih se držimo tog udžbenika. Jer je njima taj udžbenik nešto što imaju kući, što im je polazno u trenutku kad žele s roditeljima kući pogledati nešto, pokušavamo da se to prati, da se roditelji isto mogu snaći, da ne bi bilo da učiteljica priča jedno, a kući je drugo. Na primjer sada smo imali množenje, i dosta su ove nove lekcije bile rascjepkane, zapravo smo pokazali taj dio množenja i sad nije uopće bilo važno prelazi li jedinica, desetica ili stotica u tablici mjesnih vrijednosti. Sve smo to prošli odjednom. Ali ako vidim da nešto nisu, ili da je nekakva prilika, svakako ću dodatno makar spomenuti pa možda nekom to bude lakše, možda ih pogurne. Tako da otvoreni smo, na različite načine; od prezentacija, od nekakvih naših pisanja na ploču. Što više toga, zašto ne. Mislim da to više potiče njih da nisu samo šablonski, neka se to širi, neka nalaze neke svoje načine. Ne samo za matematiku, nego općenito, da dobro povezuju.*

d. *Da. To više kad su manji brojevi pa najčešće to zbrajanje, onda prolazimo to. Također sam radila s njima, kako imamo one kartončiće sa novčanicama, znala sam i na sat donositi prave kovanice dok su to manji brojevi, jer njima je ipak kad su kune u pitanju… Ono što mi je vrlo zanimljivo, kad su računi u pitanju, zbrajanje manjih brojeva; jesam li samo spomenula da su to kune, a ne cvjetovi, ne bomboni, čim su kune, samo se čuju ti kotačići, to računanje kreće. Dakle kad su u pitanju kune, svi znaju računati, a bilo koji drugi primjer… ključna riječ je kune haha. Važno je naći ono što funkcionira, ono što će ih motivirati. Valjda im je to trenutno najzornije nekako, jer je to jedino što računaju. Malo njih zapravo zbraja bombone, knjige ili nešto, ali kad kažeš kune, već znaju da je to samo račun. Ili su ih potrošili, ili su ih dobili.*

5. Intervju je proveden sa učiteljicom 4. razreda (Učiteljica 5)

a. *Prvi i drugi razred je uopće pojmiti količinu, dodavanje i oduzimanje broja 1, brojevi se odmah stavljaju na svoje mjesto na brojevnu crtu. Uočavaju mjesto na crti, krećemo sa jednim korakom, pa 2, koraci naprijed, nazad. Kad je preko desetice radi se na rastavljanje jednog od pribrojnika, umanjenika ili umanjitelja, dakle uvijek se radi do 10. Koristim obavezno i konkrete, veći, manji, najviše na modelima kocaka, ili bilo čega, slažemo bez obzira na količinu, da uoče točnu količinu, uočiti veći ili manji skup, viši ili niži, sve ono što se može brojčano odrediti. Kada pređu deseticu, i kasnije je brojevna crta, do 20. Kada savladaju do 20, kada oni to automatiziraju, prije toga nije automatizam već uz konkrete, onda krećemo na rastavljanje brojeva. Zavisi kako tko percipira, netko je na brojevnoj crti, netko je na prstima, pa imaju neke sisteme, oduzimaju od 10 i do 10. To funkcionira nekako dok nije pisano zbrajanje i oduzimanje. Pisano oduzimanje je teže jer mora puno radnji popratiti s takvim načinom oduzimanja. Oni mogu oduzeti točno, ali kad ima šesteroznamenkasti broj; ako se i dalje drže nekog načina pobrkati će im se broj, mora dodati gore 10, pa ga oduzeti na svoj način, pa se sjetiti dodati umanjitelju jednu deseticu, tako da se mogu zbuniti. Ali uglavnom svi oni nađu nekakav svoj način i model, ali uz puno, puno konkreta, što god njima odgovara. Najuspješnija su djeca koja uspiju vizualno percipirati broj. Imam jednog učenika koji je po prilagođenom programu; još nema količinsku, vizualnu predodžbu. Količina mu je jako teška za pojmiti. Vidjet će broj 52 i 532, treba se jako koncentrirati za razlikovanje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva, neće vidjeti hrpu, veću ili manju, manji broj može brojati, ali on svaki put broji jednu po jednu iako ima više istih skupova po deset. To se sa djecom radi mukotrpno od početka. Vrlo je važna procjena. Oni se nekako ne usude, kao da ih nešto sputava. Procjena nikad nije za ocjenu, nije za ništa, nego da on sam sebe ispravi u toliko koliko je pogriješio, da se što više približi nekom broju. Kada krenu računati, da kažu otprilike koji će rezultat biti. Dok su manji brojevi, oni napamet računaju da bi pogodili točno, ali nije bit toga, već snalaženje, na primjer, u trgovini da znaš otprilike koliko si potrošio.*

b. *Ohrabrujem. Ja njima pokažem jedan način, metodički, na brojevnu crtu, na rastavljanje, ali oni imaju svoje neke načine na koje će doći do rezultata. Pitanje je da li je to učinkovito. Ako je onda je dobro. Treba se paziti jer su ti njihovi načini računanja dobri dok je zbrajanje ili oduzimanje bez prijelaza. A kad je s prijelazom onda dolazi do cirkusa, izgubljeni su. Mora se pratiti na koji način učenik računa. Vrlo je važno, kad je obrada, ponavljanje, da svaki učenik izgovori to što radi. Nije bitan rezultat, nego pojmiti učenikov način računanja. Ne mora po pokazanom načinu, može na prste, oduzimati unatrag, po 3, po 2, po 5, koliko god, ali da je točno.*

c. *Ne pratim toliko udžbenik. Dogodi se da je drugačije objašnjeno, ili po meni nedovoljno dugo objašnjeno, pa ja to malo više s njima radim. Na primjer pisano oduzimanje, ono se temelji na stalnosti razlike. Prije toga to je spomenuto negdje u udžbeniku, površno, ali oni to moraju pojmiti. Dakle, ako si gornjem broju, dakle umanjeniku, dodao deset, i umanjitelju moraš dodati deset. Ali je taj deset u drugačijem obliku. Nije deset jedinica, nego jedna desetica, isti je broj samo drugačije uobličen. To je njima teško pojmiti. Svi oni klimaju, izračunaju, rješavaju ih u nizu, ali kad se stave u tablicu, njima je to apstraktno, sve biflaju, ali ne razumiju što rade. Postoje djeca koja su zrelija, koja će to sada pojmiti, a ima i onih koji će kasnije.*

d. *Stalno radimo da, sa novcima, oduzimanje, zbrajanje, težine, knjige, zadatke, ocjene. Roditelji mi na početku prvog razreda znaju reći: "On super zna matematiku." Ako je* *automatizirao četiri računske radnje i samo to, to je samo dobra trica. Ali ako tu matematiku ne zna primijeniti kad mu zadaš zadatak, što mu znači 7 i 5. To se može izračunati i na kalkulatoru ili mobitelu. Sami taj račun nije koristan ako se ne može upotrijebiti na neki način.*

6. Intervju je proveden sa učiteljicom 3. razreda (Učiteljica 6)

a. *Dakle, u prvom razredu računamo s konkretima dok zapravo shvate što je zbrajanje i oduzimanje, ili uz brojevnu crtu, uz ravnalo ako imaju poteškoća. Nastojim da mi automatiziraju brojeve do 20, dajem im diktate da shvate da trebaju vježbati. Prije pisanog računa imamo usmeno računanje, mada je to prije bilo u udžbenicima, sad ne toliko, ali znam to raditi s njima. Na primjer 320+500, po stoticama, pa deseticama, na kraju jedinicama. Nastojim da malo razvijaju mozak jer im je previše tih informacija sa strane… Krenemo uvijek od jednostavnijeg. Nekad imam učenike koji to već znaju. Dadem na primjer računsku priču da vidim tko mi to već zna, ili pokušavaju to sami riješiti, analiziramo je li dobro ili nije. Usmeno također nastojim dosta raditi s njima. Sada smo na višeznamenkastim brojevima, pa zadam broj 13 526, koji je za 100 veći. Onda oni zapravo vide da znamenku stotica povećavaju za 1, ili manji za 300, umanjuju za 3 i slično. Oni to znaju. Ali kad im kažeš 15 320 - 300, onda stanu. Tako da ih na taj način uvježbavam.*

b. *Uglavnom da. Uvijek im kažem da nađu neki svoj način, bitno je da dođu do rješenja. Hoće li doći ravno, ili okolo naokolo pa doći do njega, ja to potičem jer naši mozgovi drugačije rade. Sjećam se drugog razreda, i računanje do 100. To im je jedno od težih gradiva. I onda sam shvatila da oni imaju neki svoj sistem. Ja neke načine uopće nisam imala u svojoj glavi dok mi oni nisu rekli kako oni rade. Sjećam se jednog dječaka koji je rješavao na jedan poseban način. 81-34. 4-1=3 i onda 80-30-3=47. Tada sam bila još početnik, i bilo mi je jako zanimljivo što me on naučio jedan novi način koji ja nisam znala. Ja čak i volim da dolaze na svoj način računanja. Imam jednog učenika sa poteškoćama. I recimo u drugom razredu nije znao brojeve između 5 i 8. Upitala sam ga koji su brojevi veći od 5 manji od 8. On je rekao: "Čekajte, čekajte 1,2,3…" Morao je brojati od početka jer nema u glavi tu brojevnu crtu. Ali on dan danas računa množenje s prstima. Tako brzo radi to s rukama da je meni to fascinantno... Pustim ih na njihov način i bitno je da dođu do rješenja. Krećemo od tih jednostavnijih zadataka, te uvijek nastojim da nađu neku logičku povezanost dok rade jer se to sve nadovezuje i mislim da će tako imati trajnije znanje.*

c. *Nekad da, nekad ne. S obzirom da imam praksu već onda ja već shvaćam na koji način je njima najbolje i najlakše. Također pustim njih da odaberu svoj način, hoće li udžbenik, hoće li moj, ili naći neki svoj način, tako da kombiniram. To znam iz iskustva, a kad ga nemaš, misliš da to moraš tako kako je u udžbeniku. Tokom vremena shvatiš da ima brži korak, jednostavniji njima, prilagodljiviji.*

d. *Naravno, ja se toga uvijek držim. Recimo množenje sa 100, sa 1000, nastojim da to shvate jer im je jednostavno, dodaš dvije nule, dodaš tri… Ali kasnije shvatim da im nije sjelo. Onda dajem nove zadatke; napiši najveći višekratnik broja 1000 peteroznamenkasti. Onda shvate da treba biti zadnje 3 nule. A usmeno također nastojim stalno raditi, da istreniraju mozak jer im je sve gotovansko, sve je na gotovo… Na primjer, u drugom* *razredu zbrajanje do 100, inzistiram na usmenom načinu. I to na prvom roditeljskom kažem roditeljima, da slučajno ne pokazuju pisano. No, uvijek ima djece kojima roditelji pokažu "lakši" način pisano, pa ima djece koja se "prošvercaju" na pismenim ispitima s tim načinom, a kad su mi na ploči blokiraju.*